



信号分析与处理



李会容
缪志农 主 编

概念上，物理、数学与工程三者相结合
体系上，信号、系统和处理三者相结合
内容上，原理、方法与应用三者相结合







21 世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材

信号分析与处理

主　编　李会容　缪志农



内 容 简 介

本书系统地介绍了信号分析与处理的基本理论、基本分析及处理方法和基本实现方法。全书共分为9章，其中绪论综述了信号分析与处理学科的概况及其应用领域；第1、2章介绍了连续时间信号与系统在时域、频域、复频域内的基本理论和分析方法，给出了连续傅里叶变换、拉普拉斯变换的定义和性质，同时给出了采样定理；第3、4、5、6章讲解了离散时间信号与系统在时域、频域及复频域内的基本理论和分析方法，介绍了离散傅里叶变换及其快速算法、z变换的定义和性质；第7章研究了模拟与数字滤波器的设计原理、设计方法、结构特点及其实际应用，同时给出了各种滤波器之间的频率转换方法；第8章给出了较为常用的现代信号分析与处理的基本方法、DSP的结构特点，并结合应用实例讨论了DSP系统的设计方法。

本书体系结构紧凑、叙述方法简明、应用实例丰富、习题安排多样，所配的MATLAB例题均已通过调试，理论叙述上注重物理概念、数学概念和工程概念紧密结合，撰写方式上注重图文并茂，体现了应用型人才培养的特点。

本书可以作为自动化、测控技术与仪器、电气工程与自动化、计算机技术等专业及电气信息类其他专业的应用型本科学生学习信号分析与处理的理论和技术的教材，也可作为从事信息科学中信号分析与处理相关工作的科研人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

信号分析与处理/李会容，缪志农主编．—北京：北京大学出版社，2013.8
(21世纪全国本科院校电气信息类创新型应用人才培养规划教材)
ISBN 978-7-301-22919-4

Ⅰ.①信… Ⅱ.①李…②缪… Ⅲ.①信号分析—高等学校—教材②信号处理—高等学校—教材 Ⅳ.①TN911

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第178231号

书　　名：信号分析与处理
著作责任者：李会容　缪志农　主编
策 划 编 辑：程志强
责 任 编 辑：程志强
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-22919-4/TN・0101
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　新浪官方微博:@北京大学出版社
电 子 信 箱：pup_6@163.com
电　　话：邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62750667　出版部62754962
印　刷　者：
经　销　者：新华书店
787mm×1092mm　16开本　20.25印张　471千字
2013年8月第1版　2013年8月第1次印刷
定　　价：39.00元

前　言

步入了信息时代，在科学研究、生产建设和工程实践中，信号处理技术，特别是数字信号处理技术的应用日益广泛，正在发挥着越来越重要的作用。“信号分析与处理”这门学科正是在适应信息学科的迅猛发展、相应基础理论教学要求不断更新的情况下形成的一门新课程。它整合了“信号与系统”和“数字信号处理”两门课程，使其体系彼此存在内在联系，注重与“自动控制原理”课程的分工，从电子信息学科教学的基本任务出发，以信号分析为基础，系统分析为桥梁，处理技术为手段，系统设计为目的，实现原理、方法和应用相结合，使系统分析与设计服从信号交换与处理的需要，从根本上改变了传统的以系统分析为主、信号处理为辅的状况，加强了两门课程之间的联系。

随着信息技术的不断发展和信息技术应用领域的不断扩展，信号分析与处理课程已经成为自动化、电子技术、电气工程与自动化、计算机技术、测控技术与仪器等众多电气信息类专业的专业基础课程。虽然各个专业开设这门课程时的侧重点有所不同，应用背景也有差异，但是本课程所提炼的信号与系统分析、处理的基本理论与基本方法是通用的。为此，本书可以作为自动化专业、测量技术与仪器专业、电气工程与自动化专业、计算机技术专业及电气信息类其他专业的应用型本科学生学习信号分析与处理的理论和技术的教材。

本书在编写中力求做到4个“三结合”，即课程体系上突出“信号、系统与处理”三结合；教材内容上突出“原理、方法与应用”三结合；概念讲述上突出“物理、数学与工程”三结合；习题安排上突出“练习、实践与应用”三结合。全书在精讲理论的基础上，每章都介绍了利用MATLAB软件实现相应分析过程的方法，使学生在学习完相关的理论和分析方法后可以运用MATLAB软件进行仿真，从而在操作软件的过程中可以加深对理论知识的理解，增强学习兴趣。

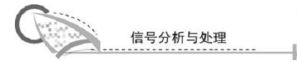
本书由李会容、缪志农担任主编，石海霞担任副主编，陈欣波、唐春菊、张小平等参编。其中第5章、第6章、第7章由石海霞编写，第8章由陈欣波编写，绪论由唐春菊编写，其余章节的编写由李会容完成，全书的审稿工作由缪志农完成，统稿工作由张小平完成。

由于编者教学经验和学术水平有限，加之时间仓促，书中难免存在疏漏和不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

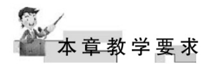
2013年4月

目　　录





绪　　论



- 了解信号的基本概念与分类，会判别信号是周期信号还是非周期信号、是功率信号还是能量信号、是连续信号还是离散信号。
- 深刻理解线性时不变系统的定义和性质，并会应用这些性质判断系统是否为线性、时不变、因果、稳定系统。
- 了解本课程的发展、应用，本课程研究的内容。



推荐阅读资料

[1] 钱同惠．信号分析与处理[M]．北京：机械工业出版社，2007.
[2] 崔翔．信号分析与处理[M]．北京：中国电力出版社，2005.
[3] 范世贵，令前华，郭婷．信号与系统[M]．西安：西北工业大学出版社，2010.



当今的社会是信息的社会，我们生活的时代是信息的时代，信息对每个人来说都具有重要的意义，它和我们的现实生活是息息相关的，如每天我们都可能打电话、看电视、上网等。信号分析与处理的应用不仅仅用于通信技术，它已经扩展到军事、生物工程、地震和地球物理研究、图像处理等许多领域，如图 0.1 所示。



图 0.1　信号分析处理在航海军事和通信中应用

0.1 信号及其分类

0.1.1 信号的概念

什么是信号?“信号”一词在人们的日常生活和社会活动中并不陌生,例如,时钟报时、汽车喇叭的声音、交叉路口的红绿灯、战场上的信号弹、电子计算机内部以及它和外围设备之间联络的电信号等,都是人们熟悉的信号。但是,要严格地给信号下定义,就必须清楚它和信息之间的联系。

什么是“信息”?信息即人们得到的“消息”,也就是原来不知道的知识,它是人类认识客观世界和改造客观世界的知识源泉。获取信息、传输信息和交换信息,自古至今一直都是人类基本的社会活动。从公元前700余年祖先利用烽火传递警报,到现代的电话、电报、传真、无线广播与电视,其目的都是要把某些“消息”借一定形式的信号从一个地方传递到另一个地方,给对方以信息。

信息要用某种物理方式表达出来,通常可以用语言、文字、图画、数据、符号等来表达。也就是说,信息通常隐含于一些按一定规则组织起来的约定的“符号”之中。但是,信息一般都不能直接传送,它必须借助于一定形式的信号(如光信号、声信号、电信号等),才能远距离快速传输和进行各种处理。因此可以说信号是信息的载体,是信息的一种表现形式。

什么是“信号”?从广义上说,信号是带有信息的随时间变化的物理量或物理现象。例如,机械振动产生力信号、位移信号及噪声信号;雷电过程产生的声、光信号;大脑、心脏运动分别产生脑电和心电信号;电气系统随参数变化产生电磁信号等。在通信技术中,信号是消息的表现形式,它是传送各种消息的工具,是通信传输的客观对象。本书将主要讨论应用广泛的电信号,它通常是随时间变化的电压或电流。由于信号是随时间而变化的,在数学上可以用时间 t 的函数 $x(t)$ 来表示。

提示思考:信号与信息哪个包含的范围更大?

0.1.2 信号的分类

1. 一维信号和 n 维信号

按照信号的维数,信号可以分为一维信号和 n 维信号。信号一般是一个或多个独立变量的函数,其中具有一个独立变量的信号称为一维信号,如心电图信号等;具有 n 个独立变量的信号称为 n 维信号,如电视信号等。本书主要以一维信号 $x(t)$ 为对象,其中独立变量 t 根据具体情况可以是时间,也可以是其他物理量。

2. 确定信号与随机信号

按时间函数的确定性划分,信号可以分为确定信号与随机信号,其波形图如图0.2所示。按确定性规律变化的信号称为确定性信号。确定信号可以用数学解析式或确定曲线准确地描述,因此,只要掌握了其变化规律,就能够准确地预测它的未来。例如,正弦信号

可以用正弦函数描述，对给定的任意时刻都对应有确定的函数值，包括未来时刻。

不遵循任何确定性规律变化的信号称为随机信号。随机信号的未来值不能用精确的时间函数描述，也无法准确地预测，在相同的条件下，它也不能准确地重现。例如，马路上的噪声、电网电压的波动量、生物电、地震波等都是随机信号。

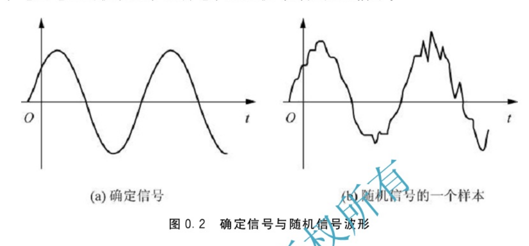


图 0.2　确定信号与随机信号波形

3. 连续信号与离散信号

按照信号自变量 t 的取值特点，信号可以分为连续信号与离散信号。连续信号如图 0.3(a)所示，它的描述函数的定义域是连续的，即对于任意时间值其描述函数都有定义，有时也称为连续时间信号，用 $x(t)$ 表示。离散信号如图 0.3(b)所示，它的描述函数的定义域是某些离散点的集合，即其描述函数仅在规定的离散时刻有定义，有时也称为离散时间信号，用 $x(t_n)$ 表示，其中 t_n 为某些特定时刻。图 0.3(b)表示的是离散点在时间轴上均匀分布的情况，也可以不均匀分布。均匀分布的离散信号可以表示为 $x(nT)$ 或 $x(n)$，也可称为时间序列。

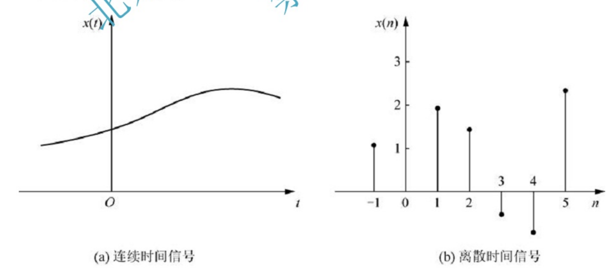


图 0.3　连续时间信号与离散时间信号

离散信号可以是连续信号的抽样信号，但不一定都是从连续信号抽样得到的，有些信号确实只是在规定的离散时刻才有意义，例如，人口的年平均出生率、纽约股票市场每天的道琼斯指数等。



小提醒：

连续信号只强调时间坐标的连续，并不强调函数幅度取值的连续，因此，一个时间坐标连续、幅度离散的信号仍然是连续信号，而那些时间和幅度均为连续取值的信号工程上称为模拟信号。显然，模拟信号是连续信号，而连续信号不一定是模拟信号。同理，时间和幅度均为离散取值的信号工程上称为数字信号，数字信号是离散信号，而离散信号不一定是数字信号。

4. 周期信号与非周期信号

按照信号有无周期，信号可以分为周期信号和非周期信号。周期信号是以一定时间周而复始，且无始无终的信号。对于连续信号，若存在 $T>0$，使

$$x(t)=x(t+nT) \quad n\text{ 为整数} \tag{0-1}$$

对于离散信号，若存在自然数 $N>0$，使

$$x(n)=x(n+kN) \quad k\text{ 为整数} \tag{0-2}$$

则称 $x(t)$、$x(n)$为周期信号，T 和 N 分别为 $x(t)$、$x(n)$的周期。显然，知道了周期信号一个周期内的变化过程，就可以确定整个定义域的信号取值。

不具有周期的信号就是非周期信号。非周期信号也可以看作周期是无穷大的周期信号，即在有限时间范围内其波形不重复出现。非周期信号有两种表现形式：一是仅仅在某些时间区间内存在。二是拟周期信号或概周期信号，这种信号是若干个周期信号之和，但不是周期信号。

例 0－1 判别下列信号是否为周期信号，若是，求出其周期。

(1) $f(t)=\sin 2t+\cos 3t$

(2) $f(t)=\cos 2t+\sin \pi t$

解 (1) $\sin 2t$ 的 $T=\pi$，$\cos 3t$ 的周期 $T=\frac{2}{3}\pi$；所以 $f(t)$的周期 T 为 2π。

(2) $\cos 2t$ 的周期 $T=\pi$，$\sin \pi t$ 的周期 $T=2$；一个为无理数，一个为有理数，不存在最小公倍数，这种信号称为**概周期信号或拟周期信号**。

例 0－2 判断离散余弦信号 $f(k)=\cos(\Omega_0 k)$是否为周期信号。

解 由周期信号的定义可知，如果 $\cos\Omega_0(k+N)=\cos(\Omega_0 k)$，则 $f(k)$是周期信号。因为

$$\cos\Omega_0(k+N)=\cos(\Omega_0 k+\Omega_0 N)$$

若为周期信号，应满足

$$\Omega_0 N=2m\pi, \qquad m\text{ 为整数}$$

或

$$\frac{2\pi}{\Omega_0}=\frac{N}{m}=\text{有理数}$$

因此，只有在$\frac{2\pi}{\Omega_0}$为有理数时，$f(k)=\cos(\Omega_0 k)$才是一个周期信号。

5. 能量信号和功率信号

从信号能量或功率的角度来研究信号十分有用，如用在机械故障诊断中，可研究故障出现的原因。



所谓能量信号，就是把信号 $x(t)$ 看成是加在 1Ω 的电阻上的电流(或电压)，则时间间隔在 $-T\leqslant t\leqslant T$ 内所消耗的能量为

$$E=\int_{-T}^{T}|x(t)|^{2}\mathrm{d}t \tag{0-3}$$

其平均功率为

$$P=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^{2}\mathrm{d}t \tag{0-4}$$

信号的能量定义为在区间$(-\infty,\ \infty)$信号 $x(t)$ 的能量，即

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^{2}\mathrm{d}t \tag{0-5}$$

而信号的功率定义为在区间$(-\infty,\ \infty)$信号 $x(t)$ 的平均功率，即

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^{2}\mathrm{d}t \tag{0-6}$$

同样，对于离散信号 $x(n)$，能量为

$$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^{2} \tag{0-7}$$

平均功率为

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^{2} \tag{0-8}$$

若一个信号的能量 E 有界，而平均功率为 0，则称为能量有限信号，简称能量信号。仅在有限时间区间不为 0 的信号是能量信号，如单个矩形脉冲信号。客观存在的信号大多是持续时间有限的能量信号。

另一种情况，若一个信号的能量 E 无限，而平均功率 P 为不等于零的有限值，则称其为功率有限信号，简称功率信号。幅度有限的周期信号、随机信号等属于功率信号。

一个信号可以既不是能量信号也不是功率信号，但不可能既是能量信号又是功率信号。

例 0-3 判断下列信号哪些属于能量信号，哪些属于功率信号。

$$x_1(t)=\begin{cases}A, & 0<t<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$x_2(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)\quad -\infty<t<\infty$$

$$x_3(t)=\begin{cases}t & t\geqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解 根据前面所讲公式，上述 3 个信号的 E、P 分别计算如下：

$$E_1=\lim_{T\to\infty}\int_{0}^{1}|A|^{2}\mathrm{d}t=A^{2}\qquad P_1=0$$

$$E_2=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}A^{2}\cos^{2}(\omega_0 t+\theta)\mathrm{d}t=\infty\quad P_2=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\cos^{2}(\omega_0 t+\theta)\mathrm{d}t=\frac{A^{2}}{2}$$

$$E_3=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}t^{2}\mathrm{d}t=\infty\quad P_3=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}t^{2}\mathrm{d}t=0$$

因此 $x_1(t)$ 为能量信号，$x_2(t)$ 为功率信号，$x_3(t)$ 既不是能量信号也不是功率信号。

0.2 系统的描述与分类

各种变化着的信号从来不是孤立存在的，信号总是在系统中产生又在系统中不断传递。什么是系统？广义地说，系统是由若干相互联系、相互作用的事物组合而成的具有特定功能的整体。系统所涉及的范围十分广泛，包括太阳系、生物系和动物的神经组织等自然系统；供电网、运输系统、计算机网(高速信息网)等人工系统；电气的、机械的、机电的、声学的和光学的系统等物理系统；以及生物系统、化学系统、政治体制系统、经济结构系统、生产组织系统等非物理系统。本书主要讨论电子学领域中的电系统。通常将施加于系统的作用称为系统的输入激励，而将要求系统完成的功能称为系统的输出响应。

0.2.1 系统的框图描述

如图 0.4 所示，系统的框图可表示为 $y(t)=T[f(t)]$。

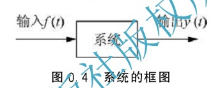


图 0.4 系统的框图

一个系统通常由若干子系统构成，各自完成一个独立的功能，共同完成一个整体功能，子系统是一个较小的系统，子系统之间的相互连接一般有串联(级联)、并联、混联、反馈等 4 种连接，具体如图 0.5 所示。

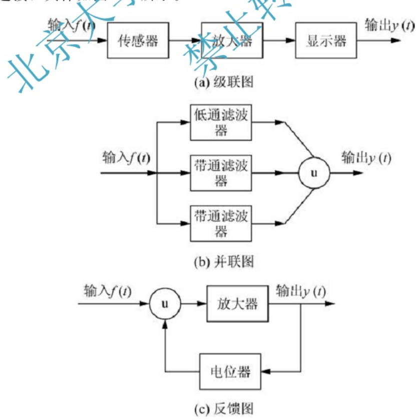


图 0.5 系统的连接框图

0.2.2　系统的性质与分类

在信号与系统分析中，系统可分为连续时间系统与离散时间系统、线性系统与非线性系统、时变系统与时不变系统、因果系统与非因果系统、稳定系统与非稳定系统、记忆系统与无记忆系统等。

1. 连续时间系统与离散时间系统

如果一个系统要求其输入激励与输出响应都必须为连续时间信号，则该系统称为连续时间系统。同样，如果一个系统要求其输入激励与输出响应都必须为离散时间信号，则该系统称为离散时间系统。如 RL 电路是连续时间系统，而数字计算机则是离散时间系统。一般情况下，连续时间系统只能处理连续时间信号，离散时间系统只能处理离散时间信号。但在引入某些信号变换的部件后，就可以使连续时间系统处理离散时间信号，离散时间系统处理连续时间信号。例如，连续时间信号经过 A/D 转换器后就可以由离散时间系统处理。连续时间系统的数学模型是微分方程，离散时间系统的数学模型是差分方程。

连续时间系统与离散时间系统常采用图 0.6 所示符号表示。连续时间激励信号 $f(t)$ 通过系统产生的响应 $y(t)$ 记为

$$y(t)=T[f(t)] \tag{0-9}$$

离散时间激励信号 $f(n)$ 通过系统产生的响应 $y(n)$ 记为

$$y(n)=T[f(n)] \tag{0-10}$$

$f(t)$ → 连续系统 → $y(t)$　　$f(n)$ → 离散系统 → $y(n)$

图 0.6　连续时间系统与离散时间系统的符号表示

2. 线性系统与非线性系统

线性系统是指具有线性特性的系统。线性特性包括齐次性与叠加性。齐次性是指当系统的输入增加 k 倍时，其输出响应也随之增加 k 倍，即

若
$$y(t)=T[f(t)]$$
则
$$ky(t)=T[kf(t)] \tag{0-11}$$

叠加性也称可加性，是指当若干个输入信号同时作用于系统时，其输出响应等于每个输入信号单独作用于系统时产生的输出响应的叠加，即

若
$$y_1(t)=T[f_1(t)],\ y_2(t)=T[f_2(t)]$$
则
$$y_1(t)+y_2(t)=T[f_1(t)]+T[f_2(t)]=T[f_1(t)+f_2(t)] \tag{0-12}$$

同时具有齐次性与叠加性的系统，即为线性系统，可表示为

若
$$y_1(t)=T[f_1(t)],\ y_2(t)=T[f_2(t)]$$
则
$$ay_1(t)+by_2(t)=aT[f_1(t)]+bT[f_2(t)]=T[af_1(t)+bf_2(t)] \tag{0-13}$$

式中：a、b 为任意常数。系统的线性特性如图 0.7 所示。

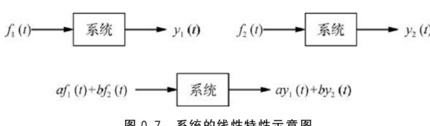


图 0.7　系统的线性特性示意图

同样，对于具有线性特性的离散时间系统也有

若　　$y_1(n)=T[x_1(n)]，y_2(n)=T[x_2(n)]$

则　　$$ay_1(n)+by_2(n)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=T[ax_1(n)+bx_2(n)] \tag{0-14}$$

式中：a、b 为任意常数。

不具有线性特性的系统称为非线性系统。

例 0－4　判断图 0.8 所示系统是否为线性系统。

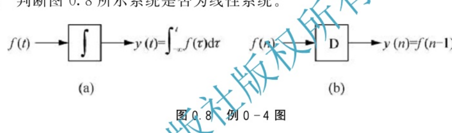


图 0.8　例 0－4 图

解　(1) 图 0.8(a)为连续时间系统，可由式(0－13)判断其是否为线性。

设 $f(t)=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)$，则

$$y(t)=T\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{t}[\alpha f_1(\tau)+\beta f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau$$

$$=\alpha\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau+\beta\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau=\alpha y_1(t)+\alpha y_2(t)$$

因此，此系统为线性系统。

(2) 图 0.8(b)为离散时间系统，可由式(0－14)判断其是否为线性。

设 $f(n)=\alpha f_1(n)+\beta f_2(n)$，则

$$y(n)=T[\alpha f_1(n)+\beta f_2(n)]=T[\alpha f_1(n)]+T[\beta f_2(n)]=\alpha y_1(n)+\beta y_2(n)$$

因此，此系统为线性系统。


小知识：

对于初始条件不为零的系统，如将初始状态视为独立的信号源产生的响应的因素，则满足线性条件，称为广义线性系统。在判断具有初始状态的系统是否线性时，应从 3 个方面来判断。其一是可分解性，即系统的输出响应可分解为零输入响应与零状态响应之和，即 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$；其二是零输入响应线性，即系统的零输入响应必须对所有的初始状态呈线性特性，如对二阶系统即 $y_{zi}(t)=k_1x(0^-)+k_2x(0^+)=k_1x_1(t_0)+k_2x_2(t_0)$；其三是零状态响应线性，即系统的零状态响应必须对所有的输入信号呈线性特性，如对单输入系统有 $y_f(t)=kf(t)$。只有这 3 个条件都符合，该系统才为广义线性系统。

例 0－5　某线性时不变系统，具有初始状态 $x(0)$，当激励为 $f(t)$时，响应为 $y(t)=\mathrm{e}^{-t}+\cos\pi t u(t)$；若初始状态不变，当激励为 $2f(t)$时，响应为 $y(t)=2\cos\pi t u(t)$。试求



当初始状态不变，激励为 $3f(t)$ 时系统的响应。

解 当初始状态为 $x(0)$，激励为 $f(t)$ 时：

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(e^{-t}+\cos\pi t)u(t)$$

当初始状态为 $x(0)$，激励为 $2f(t)$ 时：

$$y(t)=y_{zi}(t)+2y_{zs}(t)=2\cos\pi t u(t)$$

故

$$y_{zi}(t)=2e^{-t}u(t), \quad y_{zs}(t)=(-e^{-t}+\cos\pi t)u(t)$$

当初始状态不变，激励为 $3f(t)$ 时：系统的响应

$$y(t)=y_{zi}(t)+3y_{zs}(t)=(-e^{-t}+3\cos\pi t)u(t)$$

例 0-6 试判断下列输出响应所对应的系统是否为线性系统？

系统 1：$y(t)=5y(0)+2\int_{-\infty}^{\tau}x(\tau)\mathrm{d}\tau \quad t>0$

系统 2：$y(t)=5x^2(t)+2\int_{-\infty}^{\tau}x(\tau)\mathrm{d}\tau \quad t>0$

系统 3：$y(t)=5y(0)+2x^2(t) \quad t>0$

系统 4：$y(t)=5y^2(0)+2x(t) \quad t>0$

系统 5：$y(t)=5y^2(0)+\lg x(t) \quad t>0$

根据线性系统的定义，系统 1 的零输入响应和零状态均呈线性，故为线性系统；

系统 2 零状态响应不呈线性，故为非线性系统；

系统 3 仅有零输入响应呈线性，零状态响应不呈线性，故为非线性系统；

系统 4 仅有零状态响应呈线性，零输入响应不呈线性，故为非线性系统；

系统 5 的零输入响应和零状态响应均不呈线性，故为非线性系统。

3. 时变系统与时不变系统

一个系统，设输入信号 $f(t)$ 引起的零状态响应为 $y_f(t)$，若在相同起始状态下，输入 $f(t)$ 时延长一个 t_d 即输入为 $f(t-t_d)$，则响应 $y_f(t)$ 也时移同样一个 t_d，即零状态响应为 $y_f(t-t_d)$，此时该系统称为时不变系统(或非时变系统)，否则称为时变系统。图 0.9 为非时变系统示意图，即如果激励是 $f(t)$，系统产生的响应为 $y(t)$，当将激励的时间延迟 t_d 时输入激励变为 $f(t-t_d)$，则其输出响应也相同地延迟 t_d，输出响应变为 $y(t-t_d)$，但它们之间的变化规律仍保持不变，其波形保持不变。即

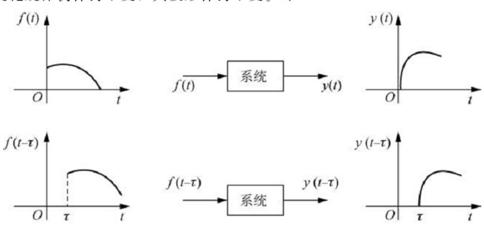


图 0.9 非时变系统示意图

若　$f(t)\rightarrow y(t)$　则有　$f(t-t_d)\rightarrow y(t-t_d)$

对于离散系统有

若　$f(n)\rightarrow y(n)$　则有　$f(n-k)\rightarrow y(n-k)$

若系统在同样信号的激励下，输出响应随加入时间起始点的不同而产生变化，则其不具备时不变特性，为时变系统。

若一个系统既是线性系统又是时不变系统，则称为线性时不变系统，用 LTI 表示。


小提醒：

一般而言，只要不是形式如 $y=T[f(\cdot)]$ 的系统，都是线性时变系统，$T[f(\cdot)]$ 是对 $f(\cdot)$ 进行线性变换。

例 0-7　试判断下列系统是非时变系统还是时变系统。

系统 1：$y(t)=tf(t)$　　　系统 2：$y(k)=f(k)-f(k-1)$

系统 3：$y(t)=f(-t)$　　　系统 4：$y(k)=f(k)\sin\Omega k$

解　对于系统 1 有 $f_1(t)\rightarrow y_1(t)=tf_1(t)$

则有
$$y_1(t-\tau)=(t-\tau)f_1(t-\tau)$$
$$f_1(t-\tau)\rightarrow y_2(t)=tf_1(t-\tau)\neq y_1(t-\tau)$$

故系统 1 为时变系统。

对于系统 2 有
$$f_1(k)\rightarrow y_1(k)=f_1(k)-f_1(k-1)$$
则有
$$y_1(k-m)=f_1(k-m)-f_1(k-1-m)$$
而
$$f_1(k-m)\rightarrow y_2(k)=f_1(k-m)-f_1(k-1-m)=y_1(k-m)$$
故系统 2 为非时变系统。

对于系统 3 有
$$f_1(t)\rightarrow y_1(t)=f_1(-t)$$
则有
$$y_1(t-\tau)=f_1[-(t-\tau)]$$
而
$$f_1(t-\tau)\rightarrow y_2(t)=f_1(-t-\tau)\neq y_1(t-\tau)$$
故系统 3 为时变系统。

对于系统 4 有
$$f_1(k)\rightarrow y_1(k)=f_1(k)\sin\Omega k$$
则有
$$y_1(k-m)=f_1(k-m)\sin\Omega(k-m)$$
而
$$f_1(k-m)\rightarrow y_2(k)=f_1(k-m)\sin\Omega k\neq y_1(k-m)$$

故系统 4 为时变系统。

4. 因果系统与非因果系统

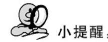
因果系统是指其响应不出现于激励作用之前的系统。也就是说，系统在某时刻的输出响应只决定于某时刻当前的激励输入和过去的激励输入，而与未来的激励输入无关。激励是产生响应的原因，响应是激励引起的结果。否则称为非因果系统。

对于连续系统，设输入信号 $f(t)$ 在 $t<0$ 时恒等于零，则因果系统的输出信号在 $t<0$ 时也必然等于零。即输入信号 $f(t)=0$，$t<0$，因果系统的输出信号 $y(t)=0$，$t<0$。

对于离散系统，设输入信号 $f(n)$ 在 $n<0$ 时恒等于零，则因果系统的输出信号在 $n<0$ 时也必然等于零。即输入信号 $f(n)=0$，$n<0$，因果系统的输出信号 $y(n)=0$，$n<0$。



如 $y(t)=3f(t)+4f'(t)$代表的是因果系统，$r(t)=e(1-t)$代表的是非因果系统。



小提醒：

一般而言，形式如 $y=T[f(b-at)]$的系统，都是非因果系统。

5. 稳定系统与不稳定系统

若输入有界，则输出有界(BIBO 准则)的系统为稳定系统，否则为不稳定系统。更确切地说，若系统的激励$|f(\cdot)|<\infty$，则输出$|y(\cdot)|<\infty$，就称该系统稳定，否则称为不稳定。对于线性时不变系统，其稳定判定将在后面详细讨论。

6. 记忆系统与无记忆系统

如果系统的输出不仅决定于当前时刻的输入，而且与它过去的状态(历史)有关，称为记忆性。具有记忆性的系统称为记忆系统或动态系统。含有记忆元件(如电容器、电感、磁芯、寄存器、存储器等)的系统都是记忆系统。连续记忆系统通常用微分方程描述，离散记忆系统通常用差分方程描述。

对于任意的输入信号，如果每一时刻该系统的输出信号值仅取决于该时刻的输入信号，而与别的时刻值无关，则该系统具有无记忆性，此系统称为无记忆系统。例如，电阻电路、放大电路、求和电路等。它有输入才有输出，一旦输入取消，其输出即刻为零，连续、离散无记忆系统，其输出与输入间的关系都可用简单的代数方程描述。如 $y(n)=f(n)$和 $y(t)=3f(t)$代表的系统都是一个无记忆性系统。

0.3　信号分析与处理的学科概述

1. 信号分析与处理的发展和应用

回顾信号分析与处理的理论与技术的发展历史，在某种意义上，信号分析与处理是一个古老的学科。它是计算数学的一个分支。从 1822 年傅里叶提出傅里叶级数，到 1965 年图基和库利发表“快速傅里叶变换算法”以来，信号分析与处理学科蓬勃发展。随着计算机技术的发展，信号分析与处理由模拟信号分析与处理向数字信号分析与处理方向发展，相应的数字信号分析与处理的理论不断成熟。随着超大规模集成电路技术的迅猛发展及微处理器的出现，各种数字信号处理器件及设备大量出现。目前，国际市场已有专门的数字滤波器、高性能数学谱分析仪、实时图像处理系统等出售。进入 21 世纪，信号分析与处理的理论与技术不断创新，自适应信号处理、小波分析、人工神经网络理论及其应用成果层出不穷，大大推动了现代通信技术、工业控制技术、航空航天技术、工程测试技术、生物医学工程技术乃至经济学等各领域的不断发展。

信号分析与处理最早和最广泛的应用领域是电子通信领域。通信信号的发送与接收采用的调制、解调、滤波、均衡等技术与设备，都是建立在信号分析与处理的理论与技术的基础上。目前数字通信技术正日新月异地迅猛发展。

机械振动信号分析与处理也是应用最早的领域之一。在几乎所有的机械工程部门，如飞机、汽车、机床、桥梁等部门中，振动一直是个重要的课题。采用各种振动传感器，在工作状态下或人工输入激振下，获得各种振动。经信号分析与处理，提取各种振动特征参数，通过对其频谱分析及参数识别等技术应用，找出消振、减振的方法，进行故障诊断，进一步改进结构设计，提高产品质量。

在自动控制与测量工程领域，信号分析与处理技术的应用也十分广泛。近代测控技术由静态测试发展到动态测试。在动态测试中，被测信号可以是周期信号、非周期信号，也可以是确定信号、随机信号。动态测试的一个重要因素是正确选择传感器的响应频率，为此必须通过对被测信号的频谱分析，掌握它的频谱特征，才能做好这一点。动态频率响应要用到 FFT 技术等，动态测试中的另一个重要因素是滤除干扰及噪声，要用到滤波技术。

在计算机控制系统中，控制对象常处在恶劣环境，干扰源较多，传感器测得的控制对象运行状态信号中夹杂着高频干扰信号，在 A/D 之前，先进行模拟抗混叠滤波，滤掉高于 1/2 采样频率的高频分量。为进一步减小干扰，在进行控制规律计算前，还需要数字滤波，进一步提高信噪比。

语音信号处理是信号分析与处理最直观的应用，包括语音分析与合成技术。语音分析是对复杂语音信号作谱分析，获得频谱包络线及谱的精细结构，以提高语音特征。语音合成是根据这些参数，用数字方法产生模拟语音声带或口音的声激励保证，再通过模拟人的发音器官的可控频响的数字滤波器，模拟原语音信号。

图像处理是数字信号处理应用迅速发展的应用领域之一。已广泛应用在军事、空间技术、医疗和气象部门中，如 CT 成像技术、心脑电图仪、指纹识别仪等设备中都广泛地使用数字图像处理。

2. 信号分析与处理的主要研究内容

(1) 连续与离散时间线性时不变系统分析。

(2) 连续与离散时间信号的时域及频域分析。

(3) 连续与离散傅里叶变换的理论。

(4) 信号的采集。

(5) 模拟和数字滤波技术。

(6) 谱分析和 FFT、快速卷积与相关算法。

(7) 自适应信号处理。

(8) 估计理论，包括功率谱分析及相关函数估计。

(9) 信号的压缩，包括语音信号和图像信号的压缩。

(10) 信号的建模。

(11) 信号重建、小波分析等特殊算法。

(12) 数字信号处理的实现。

(13) 数字信号处理的应用。

本教材为信号分析与处理的基础教材，注重讨论 1～6 所涉及的内容，同时考虑到新技术的发展，对 11～13 所涉及的内容进行简单探讨。



本章小结

1. 信号的定义及其分类

在通信技术中，信号是消息的表现形式，它是传送各种消息的工具，是通信传输的客观对象。本书将主要讨论应用广泛的电信号，它通常是随时间变化的电压或电流。由于信号是随时间而变化的，在数学上可以用时间 t 的函数 $x(t)$ 来表示。

根据信号的特点，可将其分为一维信号和 n 维信号、连续信号和离散信号、周期信号和非周期信号、确定信号和随机信号、能量信号和功率信号等。

2. 系统的描述与分类

系统是由若干相互联系、相互作用的事物组合而成的具有特定功能的整体。

系统可以分为连续系统和离散系统、线性系统和非线性系统、时变系统和时不变系统、因果系统和非因果系统、稳定系统和非稳定系统、记忆系统与无记忆系统等。

3. 信号分析与处理的学科概述

信号分析与处理学科的发展和本课程主要研究内容。



信号分析与处理在自动控制中的应用

自动控制系统是由相互关联、相互制约的若干个部分组成，为了达到某个控制目的具有一定功能的一个整体，它利用控制器使控制对象的物理量自动地按预定的规律变化。图 0.10 表示了一个典型的自动控制系统框图。其中 $r(t)$ 为系统输入信号，$u(t)$ 为控制信号，$y(t)$ 为系统输出信号，$f(t)$ 和 $e(t)$ 分别称为反馈信号和偏差信号。一个自动控制系统，除了能量流和物质流以外，信息流起着关键的作用，通过各个组成部分的信号变换和作用，才能实现系统的自动控制功能。可以认为，自动控制系统是一个将输入信号加工和变换为人们所期望的输出信号的设备，而自动控制系统的运行过程就是对信号的加工、变换过程。其中最重要的是控制器的作用，它把偏差信号变换为施加于控制对象的控制信号，这一变换过程的正确与否将直接影响自动控制系统的一系列重要特性，如稳定性、动态特性、静态特性等。自动控制系统的设计和研究，主要就是实现对控制器的设计和综合，就是在控制器上实现一定的控制策略，或者说实现一定的信号变换规则，例如常用的 PID 控制，是一种对偏差信号实现比例、积分、微分变换，并根据控制对象的性质进行加权综合的控制策略。

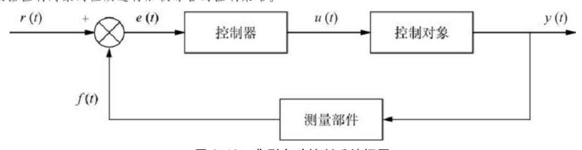


图 0.10 典型自动控制系统框图

在控制对象所处环境恶劣、干扰源多的情况下，往往需要在自动控制系统的某些位置设置滤波环节，以排除或削弱混杂在有用信号中的干扰噪声、测量噪声、这也是自动控制系统中必不可少的信号处理环节。

对于随机干扰严重的情况，系统受到外界杂散信号的作用，致使系统状态的精确性受到很大影响，进而影响系统的最佳运行方式，这对于导弹、雷达跟踪系统等要求控制特性很高的系统显然是不能接受的，解决的办法是应用概率和数理统计的方法对系统的状态进行精确的估计，即所谓的状态估计，它是通过对系统输入信号和输出信号测量值的统计处理来实现的。

此外，对未知系统的建模，或者对于参数变化的控制对象的自适应控制，都需要通过对输入信号和输出信号的处理，建立系统的数学模型，或者确定变化了的控制对象的模型参数，这就是系统辨识，也可以归结为信号处理问题。

综上所述，自动控制和信号分析、处理是紧密相关的。随着自动控制系统对象和任务的更加复杂化，一些现代的更先进的信号处理理论和技术，如小波分析、智能化处理等也越来越多地在自动控制中得到应用。因此，信号分析与处理是从事自动控制工程的科技人员必须掌握的基础理论之一。本书作为电气工程与自动化类专业学生的入门教材，由于课时和篇幅有限，仅介绍信号分析、处理理论和技术的最基本的概念、方法，使学生掌握自动控制技术中涉及的信号处理的基本理论和方法，并为进一步学习该领域的知识打下初步基础。

习　题

0-1　指出图0.11所示信号是连续信号还是离散信号。

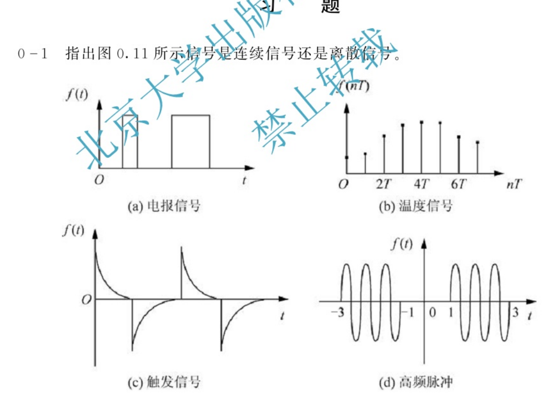


图0.11　题0-1图

0-2　判断下列信号是周期信号还是非周期信号？如果是周期信号，求出它的周期。

(1) $x(t)=2\cos(3t+\pi/4)$　　(2) $x(n)=\cos(8\pi n/7+2)$

(3) $x(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pi t-1)}$　　(4) $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n/8-\pi)}$

0-3　判断下列信号是功率信号还是能量信号。

(1) $x(t)=Ae^{-t}\quad t\geqslant 0$　　(2) $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$

(3) $x(t)=\sin 2t+\sin 2\pi t$　　(4) $x(t)=e^{-t}\sin 2t$

0-4　判断下列系统是否为线性、时不变、因果、稳定系统？

(1) $r(t)=\dfrac{de(t)}{dt}$　　(2) $r(t)=e(t)u(t)$

(3) $r(t)=\sin[e(t)]u(t)$　　(4) $r(t)=e(1-t)$

(5) $r(t)=e(2t)$　　(6) $r(t)=e^2(t)$

(7) $r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau$　　(8) $r(t)=\int_{-\infty}^{5t}e(\tau)d\tau$

第1章

连续信号的分析

本章教学要求

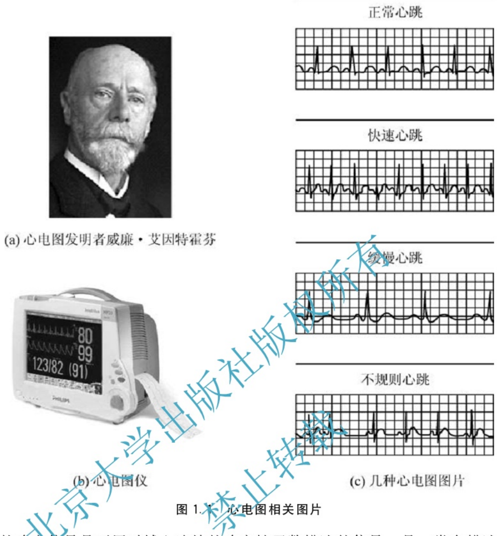
- 了解常用基本信号的时域描述方法、特点和性质，并会使用这些性质。
- 深刻理解信号的基本运算，并会求解此类问题；了解信号的分解。
- 会用傅里叶级数的定义、性质求解周期信号的频谱；深刻理解周期信号频谱的特点。
- 会用傅里叶变换的定义、性质和常见信号的傅里叶变换求解非周期信号的频谱；学会对信号进行正反傅里叶变换。
- 深刻理解周期信号的傅里叶变换及周期信号和非周期信号傅里叶变换之间的关系。
- 深刻理解并掌握拉普拉斯的定义、收敛域、基本性质及常见信号的拉普拉斯变换。
- 会使用部分分式展开法求解拉普拉斯逆变换。
- 理解连续信号的 MATLAB 实现及典型例题的解析。

推荐阅读资料

[1] 刘品潇，马社榜，李建朝. 信号与系统[M]. 长沙：国防科技大学出版社，2008.
[2] 汤全武，陈晓娟，李德敏. 信号与系统[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2008.
[3] 闫青，付晨. 信号与系统[M]. 济南：山东科学技术出版社，2008.

引例：心电图的分析

医院常让部分患者做心电图检查，何为心电图？有何作用？心电图(图 1.1)指的是心脏在每个心动周期中，由起搏点、心房、心室相继兴奋，伴随着心电图生物电的变化，通过心电描记器从体表引出多种形式的电位变化的图形(简称 ECG)。心电图是心脏兴奋的发生、传播及恢复过程的客观指标。它是反映心脏兴奋的电活动过程，对心脏基本功能及其病理研究方面，具有重要的参考价值。心电图可以分析与鉴别各种心律失常；也可以反映心肌受损的程度和发展过程，以及心房、心室的功能结构情况。在指导心脏手术进行及指示必要的药物处理上有参考价值。然而，心电图并非检查心脏功能状态必不可少的指标。因为有时貌似正常的心电图不一定证明心功能正常；相反，心肌的损伤和功能的缺陷并不总能使心电图显示出任何变化。所以心电图的检查必须结合多种指标和临床资料，进行全面综合分析，才能对心脏的功能结构做出正确的判断。



(a) 心电图发明者威廉・艾因特霍芬

(b) 心电图仪

(c) 几种心电图图片

图 1.1 心电图相关图片

连续的确定信号是可用时域上连续的确定性函数描述的信号，是一类在描述、分析上最简单的信号，同时又是其他信号分析的基础。本章着重讨论这种信号的分析方法，包括时域分析、频域分析及复频域分析。

1.1 连续信号的时域分析

1.1.1 连续信号的时域描述

连续信号可以用一个时间函数或一条曲线来表示。下面介绍一些常见的连续时间信号。

1. 指数信号

$$x(t)=A\mathrm{e}^{at} \qquad -\infty<t<\infty \tag{1-1}$$

式中：a 是实数。

当 $a>0$ 时，信号幅值随 t 增加而增大，为增值函数；当 $a<0$ 时，幅值随 t 增加而减

少，为衰减函数。实际中，常遇到的信号为衰减指数信号，如图 1.2 所示。

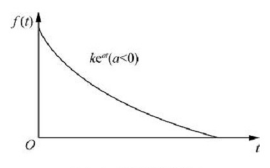


图 1.2　衰减指数信号

2. 正弦信号

$$x(t)=A\sin(\omega t+\theta)\qquad -\infty<t<\infty \tag{1-2}$$

式中：A 为振幅；ω 为角频率，rad/s；θ 为初相位，rad。

正弦信号波形如图 1.3 所示。而余弦信号与正弦信号仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$。正弦信号和余弦信号常借用复指数信号来表示，由欧拉公式可知

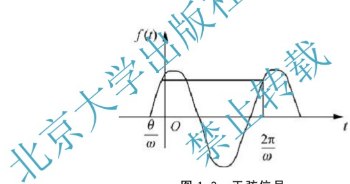


图 1.3　正弦信号

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$$
$$e^{-j\omega t}=\cos\omega t-j\sin\omega t$$

3. 抽样信号 Sa(t)

抽样信号的函数表达式如下：

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t} \tag{1-3}$$

显然，Sa(t)是偶函数，其图形如图 1.4 所示，它具有如下特性：

$$\mathrm{Sa}(t)=\mathrm{Sa}(-t)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(t)\,dt=\pi$$
$$\mathrm{Sa}(k\pi)=0,\ k=\pm1,\ \pm2,\ \cdots$$
$$\mathrm{Sa}(0)=1$$
$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{Sa}(t)=0$$

4. 单位阶跃信号 $u(t)$

$$u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\0, & t<0\end{cases} \tag{1-4}$$

信号的波形如图1.5所示。

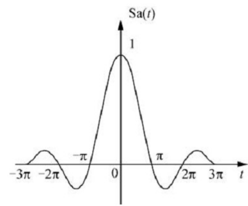


图1.4　Sa(t)信号

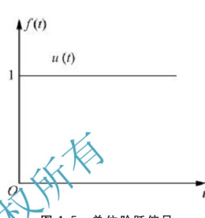


图1.5　单位阶跃信号

小提醒：

阶跃信号在 $t=0$ 时发生跳变，所以在 $t=0$ 没有定义。阶跃信号具有单边特性，因此可以用来描述信号的接入特性，表示分段函数。

单位阶跃信号 $u(t)$ 具有使任意非因果信号 $f(t)$ 变为因果信号的功能，即将 $f(t)$ 乘以 $u(t)$，所得 $f(t)u(t)$ 即成为因果信号。

5. 单位斜坡信号 $r(t)$

$$r(t)=\begin{cases}t, & t\geqslant 0\\0, & t<0\end{cases} \tag{1-5}$$

信号的波形如图1.6所示。

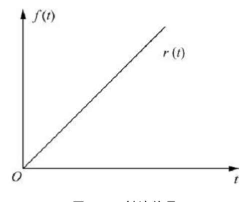


图1.6　斜坡信号

6. 单位冲激函数 $\delta(t)$

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的定义式为

$$\begin{cases} \delta(t)=0,\ t\neq 0 \\ \delta(t)=\infty,\ t=0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \end{cases} \tag{1-6}$$

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的波形图如图 1.7 所示，可见 $\delta(t)$ 是在 $t=0$ 时高度为无穷大、宽度为 0、但面积为 1 的脉冲信号，通常称为冲激强度为 1 的单位冲激函数。$\delta(t-t_0)$ 则表示在 $t=t_0$ 处所出现的冲激，如图 1.8 所示。显然有

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0,\ t\neq t_0 \\ \delta(t-t_0)=\infty,\ t=t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1 \end{cases} \tag{1-7}$$

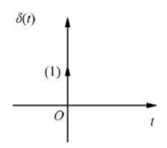


图 1.7　冲激函数的表示方法

图 1.8　延迟的冲激函数 $\delta(t-t_0)$

根据 δ 函数的定义，可推出 δ 函数有如下的性质。

1） 筛选特性

如果信号 $f(t)$ 是一个在 $t=0$ 与 $t=t_0$ 处连续的普通函数，则有

$$\begin{aligned} f(t)\delta(t)&=f(0)\delta(t) \\ f(t)\delta(t-t_0)&=f(t_0)\delta(t-t_0) \end{aligned} \tag{1-8}$$

上式表明连续时间信号 $f(t)$ 与冲激信号 $\delta(t)$ 或 $\delta(t-t_0)$ 相乘时，筛选出信号 $f(t)$ 在 $t=0$ 或 $t=t_0$ 时的函数值 $f(0)$ 或 $f(t_0)$。

2） 抽样特性

如果信号 $f(t)$ 是一个在 $t=t_0$ 处连续的普通函数，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0) \tag{1-9}$$

冲激信号的抽样特性表明，一个连续时间信号 $f(t)$ 与冲激信号 $\delta(t-t_0)$ 相乘，并在 $(-\infty,\ +\infty)$ 时间域上积分时，其结果为信号 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 时的函数值 $f(t_0)$。

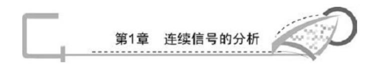
3） 展缩特性

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1-10}$$

由展缩特性可得出如下推论。

推论 1：冲激信号是偶函数。取 $a=-1$ 即可得 $\delta(t)=\delta(-t)$

推论 2：$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$



4）δ 函数与阶跃函数的关系为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

7. 单位冲激偶函数 $\delta'(t)$

单位冲激函数的微分$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)$，定义为单位冲激偶函数，记为 $\delta'(t)$。它在 $t=0$ 处有一对正负冲激函数，其强度都是无穷大，如图 1.9 所示。

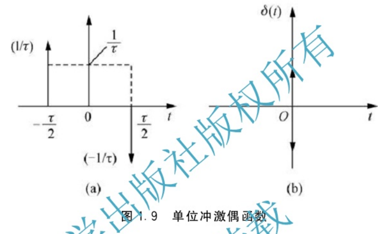


图 1.9　单位冲激偶函数

单位冲激偶函数有如下特性。

1）筛选特性

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t=-f'(t_0) \tag{1-11}$$

2）奇偶性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0 \tag{1-12}$$

所以，冲激偶函数是奇函数。

3）冲激偶信号与冲激信号的关系

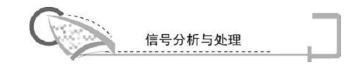
$$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t)$$

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$$

8. 符号函数 sgn(t)

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases} \tag{1-13}$$

信号的波形如图 1.10 所示。



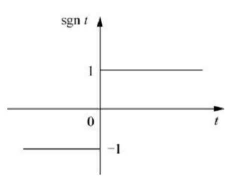


图 1.10　符号函数

9. 复指数信号

$$f(t)=A\mathrm{e}^{st}, \qquad t\in \mathbf{R} \tag{1-14}$$

式中：$s=\delta+\mathrm{j}\omega_0$；$A$ 一般为实数，也可为复数。

利用欧拉公式将式(1-14)展开，可得

$$A\mathrm{e}^{st}=A\mathrm{e}^{(\delta+\mathrm{j}\omega_0)t}=A\mathrm{e}^{\delta t}\cos(\omega_0 t)+\mathrm{j}A\mathrm{e}^{\delta t}\sin(\omega_0 t) \tag{1-15}$$

式(1-15)表明，一个复指数信号可分解为实部、虚部两部分。实部、虚部分别为幅度按指数规律变化的正弦信号。若 $\delta<0$，复指数信号的实部、虚部为衰减正弦信号，波形如图 1.11(a)、(b)所示。若 $\delta>0$，其实部、虚部为增幅正弦信号，波形如图 1.11(c)、(d)所示。若 $\sigma=0$，式(1-15)可写成纯虚指数信号

$$f(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$$

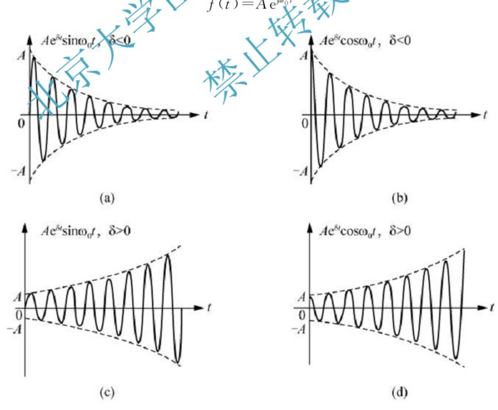


图 1.11　复指数信号的实部和虚部

若 $\omega_0=0$，则复指数信号成为一般的实指数信号。若 $\delta=0$，$\omega_0=0$，复指数信号的实



部、虚部均与时间无关，成为直流信号。

复指数信号在物理上是不可实现的，但是它概括了多种情况。利用复指数信号可以表示常见的普通信号，如直流信号、指数信号及正弦信号等。复指数信号的微分和积分仍然是复指数信号，利用复指数信号可以使许多运算和分析简化。因此，复指数信号是信号分析中非常重要的基本信号。

1.1.2　连续时间信号的基本运算

1. 相加

信号的相加是指若干信号之和，可表示为

$$y(t)=f_1(t)+f_2(t)+\cdots+f_n(t) \tag{1-16}$$

图 1.12　所示是信号相加的一个例子。

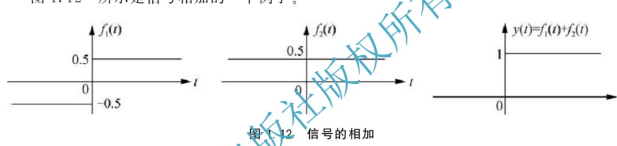


图 1.12　信号的相加

信号在时域中相加时，横抽(时间 t 轴)的值不变，仅是与时间 t 轴的值相对应的纵坐标值相加。

2. 相乘

信号的相乘是指若干信号的乘积，可表示为

$$y(t)=f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot\cdots\cdot f_n(t) \tag{1-17}$$

图 1.13 所示是信号相乘的一个例子。

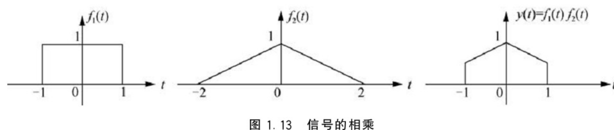


图 1.13　信号的相乘

信号在时域中相乘时，横抽(时间 t 轴)的值不变，仅是与时间 t 轴的值相对应的纵坐标值相乘。信号处理系统中的抽样器和调制器，都是实现信号相乘运算功能的系统。乘法器也称为调制器。

3. 数乘

将信号 $f(t)$乘以实常数 a，称为对信号 $f(t)$进行数乘运算，即

$$y(t)=af(t) \tag{1-18}$$

信号的时域数乘运算用数乘器实现，如图 1.14 所示。数乘器也称为比例器或标量乘法器。

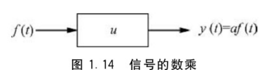


图 1.14　信号的数乘

信号的时域数乘运算，实质上就是在对应的横坐标值上将纵坐标的值扩大到 a 倍（$a>1$ 时为扩大；$0<a<1$ 时为缩小）。

4. 尺度变换

信号的尺度变换是指将信号 $f(t)$ 变化到 $f(at)(a>0)$ 的运算，如图 1.15 所示。若 $0<a<1$，则 $f(at)$ 的波形是将 $f(t)$ 的波形以纵轴为中心的扩展 $1/a$ 倍。若 $a>1$，则 $f(at)$ 的波形是将 $f(t)$ 的波形以纵轴为中心的压缩 $1/a$ 倍。

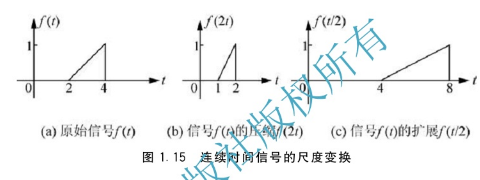


图 1.15　连续时间信号的尺度变换

5. 翻转

信号的翻转是指将信号 $f(t)$ 变化为 $f(-t)$ 的运算，即将 $f(t)$ 的波形以纵轴为中心作 180°翻转，如图 1.16 所示。

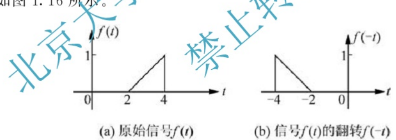
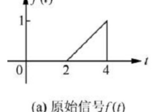


图 1.16　连续时间信号的翻转

6. 时移（平移）

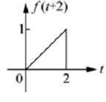
信号的平移是指将信号 $f(t)$ 变化为信号 $f(t\pm t_0)(t_0>0)$ 的运算。若为 $f(t-t_0)$ 的波形，则表示将信号 $f(t)$ 的波形右移 t_0 单位；若为 $f(t+t_0)$ 的波形，则表示将信号 $f(t)$ 的波形左移 t_0 单位，如图 1.17 所示。



(a) 原始信号f(t)

f(t-2)
1
0
4
6
t

(b) 信号f(t)的右移f(t-t₀)



(c) 信号f(t)的左移f(t+t₀)

图 1.17　连续时间信号的平移



以上对信号的展缩、平移与翻转分别进行了描述。实际上，信号的变化常常是上述3种方式的综合，即信号 $f(t)$变化为 $f(at+b)$ $(a\neq 0)$。

7. 信号的微分

信号的微分是指信号对时间的导数，可表示为

$$y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) \tag{1-19}$$

8. 信号的积分

信号的积分是指信号在区间$(-\infty, t)$上的积分，可表示为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-20}$$

9. 卷积积分

卷积法在信号与系统理论中占有重要地位，随着理论研究的深入和计算机技术的发展，卷积法得到了更加广泛的应用。根据线性时不变系统(LTI)的性质，如果将作用于LTI系统的输入信号分解，而且每个分量作用于系统的响应容易求得。那么，根据叠加原理，将各个分量产生的响应求和即可得原输入信号引起的响应，这种分解可表示为像冲激、阶跃、三角函数(指数函数)这样一些基本函数的加权和。卷积法的原理就是将信号分解成许多冲激信号之和，并借助系统的冲激响应，求解线性时不变系统对任意激励信号的零状态响应，它也是时域与变换域方法之间相联系的重要手段。卷积是连续信号与系统时域分析中一个重要的数学工具。

1) 定义

设 $f_1(t)$、$f_2(t)$是定义在$(-\infty, +\infty)$区间上的两个连续时间信号，则可以将积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

定义为 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的卷积，简记为 $f_1(t)*f_2(t)$。这里 τ 是积分变量，t 是参变量，显然，积分结果是 t 的函数。

2) 表达式

$$f_1(t)*f_2(t)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-21}$$

式中：τ 为虚设时间变量。

3) 卷积的积分限讨论

(1) $f_1(t)$为因果信号，$f_2(t)$为任意信号，积分限为$(0, +\infty)$。

$$\text{表达式}=\int_{0}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(2) $f_2(t)$为因果信号，$f_1(t)$为任意信号，积分限为$(-\infty, t)$。

$$\text{表达式}=\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(3) $f_1(t)$、$f_2(t)$同为因果信号，积分限为$(0, t)$。

$$\text{表达式}=\int_{0}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

4）卷积的图解机理

卷积积分的图解法能直观地理解卷积的计算过程并加深对其物理意义的理解，而且在确定卷积积分的上、下限时，图解法是一种极有用的辅助手段。图解的步骤如下。

(1) 画出 $f_1(t)$和 $f_2(t)$的波形，将波形图中的 t 轴改换成 τ 轴，分别得到 $f_1(\tau)$和 $f_2(\tau)$的波形。

(2) 将 $f_2(\tau)$的波形以纵轴为对称轴进行翻转，得到 $f_2(-\tau)$的波形。

(3) 给定一个 t 值，将 $f_2(-\tau)$的波形沿 τ 轴平移$|t|$。当 $t<0$ 时，波形往左移；当 $t>0$ 时，波形往右移，这样便得到了 $f_2(t-\tau)$的波形。

(4) 将 $f_1(\tau)$和 $f_2(t-\tau)$相乘，得到卷积积分式中的被积函数 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$。

(5) 计算乘积信号 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)$波形与 τ 轴之间包含的净面积，$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 便是在 t 时刻的卷积值。

(6) 令变量 t 在$(-\infty, +\infty)$范围内变化，重复第(3)、(4)、(5)步操作，最终得到卷积信号 $f_1(t)*f_2(t)$。

例 1-1 已知 $x(t)=u(t)-u(t-T)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$，求 $y(t)=x(t)*h(t)$，并画出 $y(t)$的波形。

解 (1) 画出 $x(t)[x(\tau)]$，$h(t)[h(\tau)]$和 $h(-\tau)$的波形，如图 1.18(a)、(b)、(c)所示。

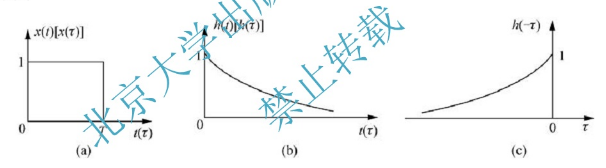


图 1.18 $x(t)[x(\tau)]$、$h(t)[h(\tau)]$和 $h(-\tau)$的波形

(2) 当 $t\leqslant 0$ 时，$h(t-\tau)$与 $x(\tau)$的波形如图 1.19(a)所示，它们没有重叠部分，所以 $x(\tau)h(t-\tau)=0$，即 $y(t)=0$。

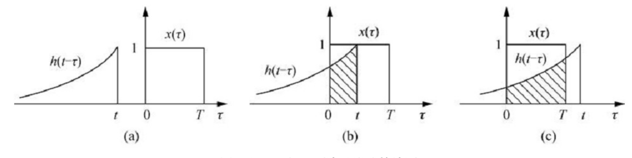


图 1.19 $h(t-\tau)$与 $x(\tau)$的波形

(3) 当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，$h(t-\tau)$与 $x(\tau)$的波形如图 1.19(b)所示，它们有重叠部分，重叠区域为$[0, t]$，所以

$$y(t)=\int_0^t 1\cdot \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=1-\mathrm{e}^{-t}$$

(4) 当 $t\geqslant T$ 时，$h(t-\tau)$ 与 $x(\tau)$ 的波形如图 1.19(c)所示，它们有重叠部分，重叠区域为$[0, T]$，所以

$$y(t)=\int_0^T 1\cdot \mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau=\mathrm{e}^{-(t-T)}-\mathrm{e}^{-t}$$

归纳以上结果得到

$$y(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ 1-\mathrm{e}^{-t}, & 0\leqslant t\leqslant T\\ \mathrm{e}^{-(t-T)}-\mathrm{e}^{-t}, & t\geqslant T\end{cases}$$，其波形图如图 1.20 所示。

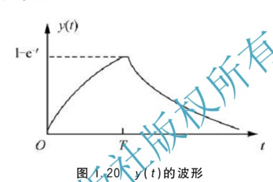


图 1.20　$y(t)$的波形

5) 卷积积分的性质

性质 1：卷积代数性质

(1) 交换律：$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

(2) 分配律：$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

本定律用于系统分析，指出并联系统的冲激响应，等于组成并联系统的各个子系统冲激响应之和，如图 1.21 所示。

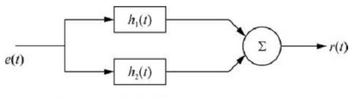


图 1.21　并联系统 $r(t)=h_1(t)+h_2(t)$

(3) 结合律。

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$$

本定律用于系统分析，指出串联系统的冲激响应，等于组成串联系统的各个子系统冲激响应之卷积，如图 1.22 所示。

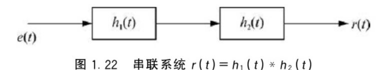


图 1.22　串联系统 $r(t)=h_1(t)*h_2(t)$

性质 2：与冲激函数与阶跃函数的卷积

(1) 与冲激函数的卷积。



$$f(t)*\delta(t)=f(t) \tag{1-22}$$

（2）与阶跃函数的卷积。

$$f(t)*u(t)=f^{(-1)}(t) \tag{1-23}$$

（3）与冲激偶的卷积。

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t) \tag{1-24}$$

性质3：卷积的微分与积分

（1）卷积的微分。

设 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，

则
$$y'(t)=f_1'(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2'(t) \tag{1-25}$$

证明
$$\begin{aligned}y'(t)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_1(t)*f_2(t)]\\&=f_1(t)*f_2(t)*\delta'(t)\\&=f_1'(t)*f_2(t)\\&=f_1(t)*f_2'(t)\end{aligned}$$

（2）卷积的积分。

设 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，

则
$$y^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t) \tag{1-26}$$

证明
$$\begin{aligned}y^{(-1)}(t)&=\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau\\&=f_1(t)*f_2(t)*u(t)\\&=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)\\&=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)\end{aligned}$$

（3）卷积的微积分。

设 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，

则
$$y(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2'(t) \tag{1-27}$$

证明
$$\begin{aligned}y(t)&=f_1(t)*f_2(t)*u(t)*\delta'(t)\\&=f_1^{(-1)}(t)*f_2'(t)\\&=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)\end{aligned}$$


小知识：

卷积的微积分有使用条件：①被积分的函数在$(-\infty,\infty)$上的积分为0；②被求导的函数在$t\to-\infty$时为0。这两个条件是或的关系，满足一个即可。

性质4：卷积的时移

设 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，

则
$$y(t-t_0)=f_1(t-t_0)*f_2(t)=f_1(t)*f_2(t-t_0) \tag{1-28}$$

证明
$$f_1(t)*f_2(t-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(t-t_0-x)\mathrm{d}x$$

$$(令\ x=\tau-t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau-t_0)f_2(t-\tau)\mathrm{d}x$$
$$=f_1(t-t_0)*f_2(t)$$
$$y(t-t_0)=y(t)\big|_{t=t-t_0}=f_1(t)*f_2(t)\big|_{t=t-t_0}=f_2(t)*f_1(t)\big|_{t=t-t_0}$$
$$=f_1(t)*f_2(t-t_0)=f_1(t-t_0)*f_2(t)$$

推广 $y(t-t_1-t_2)=f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)$

例 1-2　计算 $k*f(t)=?$

解

$$k*f(t)=f(t)*k=\int_{-\infty}^{+\infty} kf(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=k[f(t)\ 波形的净面积]$$

此式不能用微积分公式，因常数 $k\rightarrow-\infty$ 不为 0。

例 1-3　$u(t+1)*u(t-2)=u(t)*u(t-1)=(t-1)*u(t-1)$

例 1-4　$tu(t)*\delta''(t-2)=u(t)*\delta'(t-2)=\delta(t)*\delta(t-2)=\delta(t-2)$

解

$$tu(t-1)*\delta''(t-2)=(t-1)u(t-1)*\delta''(t-2)+u(t-1)*\delta''(t-2)$$
$$=\delta(t-3)+\delta'(t-3)$$

例 1-5　$y(t)=f(t)*\delta(t-\tau)=f(t-\tau)$



小提醒：

几个常见信号卷积公式

$$u(t)*\mathrm{e}^{-at}u(t)=\frac{1}{a}[1-\mathrm{e}^{-at}]u(t)$$
$$\mathrm{e}^{-at}u(t)*\mathrm{e}^{-at}u(t)=t\mathrm{e}^{-at}u(t)$$
$$\mathrm{e}^{-at}u(t)*\mathrm{e}^{-bt}u(t)=\frac{1}{b-a}[\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}]u(t)$$

1.1.3　信号的分解

1. 信号分解为冲激函数之和

任意信号 $x(t)$ 可以近似地用一系列等宽度的矩形脉冲之和表示，如图 1.23 所示。如果矩形脉冲的宽度为 $\Delta\tau$，则从零时刻起的第 $k+1$ 个矩形脉冲可表示为 $x(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}$，$x(t)$ 近似地表示为

$$x(t)\approx\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{x(k\Delta t)\{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]\}}{\Delta\tau}\Delta\tau$$

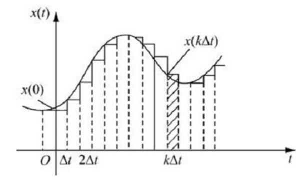


图 1.23　$x(t)$分解波形

在 $\Delta\tau\to 0$ 的极限情况下，$\Delta\tau\to \mathrm{d}\tau$，$k\Delta\tau\to\tau$，而

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t-k\Delta t)-u[t-(k+1)\Delta t]}{\Delta t}=\delta(t-\tau)$$

上式变为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

上式表明：任意信号 $x(t)$都可以用经平移的无穷多个单位冲激函数加权后的连续和(积分)表示，换言之，任意信号 $x(t)$都可以分解为一系列具有不同强度的冲激函数。

2. 信号分解为直流分量与交流分量之和

一个连续信号 $x(t)$可以分解为直流分量 $x_{\mathrm{D}}(t)$与交流分量 $x_{\mathrm{A}}(t)$之和，即

$$x(t)=x_{\mathrm{D}}(t)+x_{\mathrm{A}}(t)$$

直流分量 $x_{\mathrm{D}}(t)$是信号的平均值，从原信号中减去直流分量就可得到信号的交流分量 $x_{\mathrm{A}}(t)$。

1.2　连续信号的频域分析

本节将介绍连续时间信号频域分析的基本概念和基本方法。上一节是从时域的角度对信号进行描述、运算和分解，虽然很直观，但实际应用中会面临很多困难，而从频域的角度对信号进行分析，将对信号认识得更加清楚，具有许多突出的优点。信号的频域分析分为周期信号的频域分析傅里叶级数和非周期信号的频域分析傅里叶变换，现介绍讲解如下。

1.2.1　周期信号的傅里叶级数

周期信号是周而复始、无始无终的信号。其表达式为

$$f(t)=f(t+nT) \tag{1-29}$$

式中：n 为任意值；T 为基波周期；$f=\dfrac{1}{T}$为基波频率；$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$为基波角频率。

在满足狄里赫利条件下，可展开成傅里叶级数。狄里赫利条件为有以下几个条件。

(1) 在任意周期内存在有限个第一类间断点。

（2）在任意周期内存在有限个极值点。

（3）在任意周期上是绝对可积的，即

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

对于一般工程实际中遇到的信号，通常能满足此条件，因此，以后除非特殊需要，一般不再考虑这一条件。

1．三角函数形式傅里叶级数

三角函数形式的傅里叶级数就是将周期信号展开成不同频率的正弦或余弦函数的线性组合，即

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos\Omega t + a_2\cos(2\Omega t) + \cdots + a_n\cos n\Omega t + \cdots \\ &\quad + b_1\sin\Omega t + b_2\sin(2\Omega t) + \cdots b_n\sin n\Omega t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\Omega t + b_n\sin n\Omega t) \end{aligned} \tag{1-30}$$

式中：$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$称为基波角频率；$\dfrac{a_0}{2}$、a_n、b_n 为加权系数。

其中系数 a_n、b_n 可由式(1－31)求得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\Omega t\,\mathrm{d}t \\ a_0 &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{1-31}$$

这里，t_0 可任意选择，视方便而定，一般取 $t_0=0$ 或$-\dfrac{T}{2}$。

利用三角函数公式，式(1－30)可以写成另外一种形式：

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\Omega t + \varphi_n) \tag{1-32}$$

式中：A_n 是 n 次谐波的幅值；φ_n 是 n 次谐波的相位；A_0 为直流分量。

比较式(1－30)和式(1－32)，可以得到系数之间的关系如下：

$$\begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}} \\ \varphi_n = -\operatorname{arctg}\dfrac{b_n}{a_n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_n = A_n\cos\varphi_n \\ b_n = -A_n\sin\varphi_n \end{cases}$$

可见，任意周期信号可以分解为直流分量及许多不同频率、不同相位、不同幅值的正弦分量信号之和。通常把这些分量称为周期信号的谐波分量，而且各谐波分量的频率是基波频率的整数倍。如果以频率为横轴，以振幅或相位为纵轴，画出 A_n、φ_n，便可以直观



地看出各频率分量的振荡幅度大小和初始相位变化情况，得到的图形分别称为信号的幅度频谱和相位频谱，统称为频谱图。

现在讨论 $t_0=-\frac{T}{2}$时，由于 $f(t)$的奇偶性不同，对 a_n、b_n 的值的影响。

1） 当 $f(t)$为偶函数时

$$a_n=\frac{4}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}}f(t)\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n=0$$

$$a_0=\frac{4}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t$$

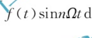


小提醒：

展开式中只有余弦函数和直流分量。

2） 当 $f(t)$为奇函数时





$$a_n=0$$

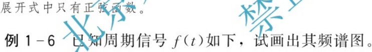
$$b_n=\frac{4}{T}\int_0^{+\frac{T}{2}}f(t)\sin n\Omega t\,\mathrm{d}t$$

$$a_0=0$$



小提醒：

展开式中只有正弦函数。



例 1-6 已知周期信号 $f(t)$如下，试画出其频谱图。

$$f(t)=1+\sqrt{2}\cos(\omega_0 t)-\cos(2\omega_0 t+\frac{5\pi}{4})+\sqrt{2}\sin(\omega_0 t)+\frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t)$$

解 将 $f(t)$整理为标准形式：

$$f(t)=1+2\cos(\omega_0 t-\frac{\pi}{4})+\cos(2\omega_0 t+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}\sin(3\omega_0 t-\frac{\pi}{2})$$

因此有

$$A_0=2$$

$$A_1=2,\ \varphi_1=-\frac{\pi}{4}$$

$$A_2=1,\ \varphi_2=\frac{\pi}{4}$$

$$A_3=\frac{1}{2},\ \varphi_3=-\frac{\pi}{2}$$

其余 $A_n=0$，$\varphi_n=0$

其振幅谱与相位谱如图 1.24 所示。



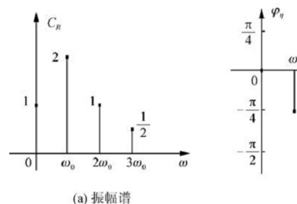


图 1.24　振幅谱与相位谱

例 1－7　求图 1.25 所示信号的三角函数形式傅里叶级数展开式。

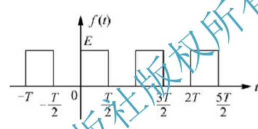


图 1.25　例 1－7 信号波形

解　因为加权系数求解公式

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin n\Omega t\,\mathrm{d}t$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

而 $t_0=0$ 时公式为

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\Omega t\,\mathrm{d}t$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

且

$$f(t)=\begin{cases}0, & \frac{T}{2}<t<T\\ E, & 0<t<\frac{T}{2}\end{cases}$$

所以

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} E\,\mathrm{d}t = E$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} E\cos n\Omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2E}{T}\cdot\frac{1}{n\Omega}\sin n\Omega t\Big|_0^{\frac{T}{2}} = 0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\Omega t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}E\sin n\Omega t\,\mathrm{d}t=\frac{2E}{T}\cdot\frac{1}{n\Omega}(-\cos n\Omega t)\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2E}{n\pi},\ n\ \text{为奇数}\\ 0,\ n\ \text{为偶数}\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{E}{2}+\frac{2E}{\pi}(\sin\Omega t+\frac{1}{3}\sin 3\Omega t+\frac{1}{5}\sin 5\Omega t+\cdots)$$

2. 指数形式傅里叶级数

由三角函数形式傅里叶级数利用欧拉公式就可以推导出指数形式的傅里叶级数，其表达式如下：

$$\begin{aligned}f(t)&=F_0+F_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}+F_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\Omega t}+F_3\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\Omega t}+\cdots\\&\quad+F_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}+F_{-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\Omega t}+F_{-3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\Omega t}+\cdots\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\end{aligned}$$

式中：$F_n=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$ 。 (1-33)

指数形式傅里叶级数系数与三角函数傅里叶级数系数之间的关系如下：

$$\dot{A}_n=A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=A_n\cos\varphi_n+\mathrm{j}A_n\sin\varphi_n=a_n-\mathrm{j}b_n$$

$$\dot{A}_n=2F_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$$

这里，F_n 一般为复数，故称为复数频谱。$F_n=|F_n|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$，可以画出幅度谱 $|F_n|-\omega$ 与相位谱 $\varphi_n-\omega$。指数形式傅里叶级数说明任意一个周期函数也可以分解为直流分量及一系列不同频率的复指数分量之和。

3. 周期信号的频谱

1) 周期信号频谱图

例 1-8 试画出 $f(t)$的振幅频谱和相位频谱。

$$f(t)=1+3\cos(\pi t+10°)+2\cos(2\pi t+20°)+0.4\cos(3\pi t+45°)+0.8\cos(6\pi t+30°)$$

解 $f(t)$为周期信号，所以 $f(t)$的三角函数形式的展开式为

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

基波频率为 $\Omega=\pi(\mathrm{rad/s})$，周期 $T=2s$，$n\Omega=2\pi$、3π、6π 分别为 2 次、3 次、6 次谐波频率。且有

$$\frac{A_0}{2}=1\qquad \varphi_0=0°$$

$$A_1=3\qquad \varphi_1=10°$$

$$A_2=2\qquad \varphi_2=20°$$

$$A_3=0.4\qquad \varphi_3=45°$$

$$A_4=0.8 \qquad \varphi_4=30^\circ$$

$$\text{其余 } A_n=0$$

$f(t)$的振幅频谱和相位频谱如图 1.26 所示。

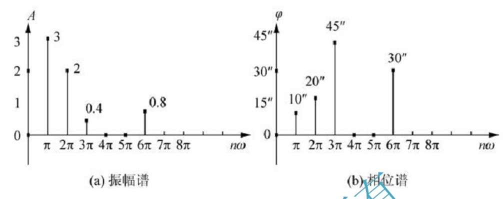


图 1.26 信号的单边频谱

上述绘制的是三角函数形式傅里叶级数的系数 A_n 与 ω 的关系图，由于 $n>0$，故只能绘制 $\omega>0$ 的半个平面，故为半边频谱。

也可以用指数形式求出 $f(t)$的双边谱。即将 $f(t)$展开为指数形式的傅里叶级数，就可以得到 F_n 与 ω 的关系图，由于 n 值为整个平面，故为双边谱，如图 1.27 所示。

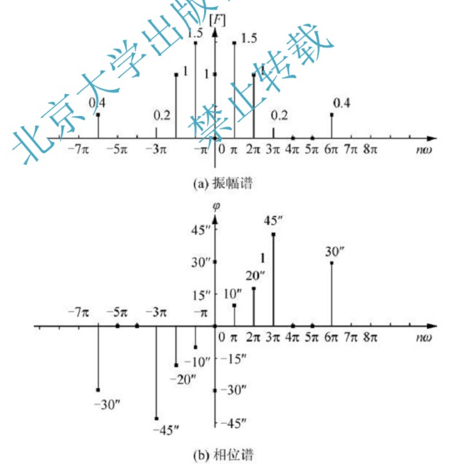


图 1.27 信号的双边频谱

2）周期信号频谱的特点

（1）离散性，此频谱由不连续的谱线组成，每一条谱线代表一个正弦分量，所以此频谱称为不连续谱或离散谱。

（2）谐波性，此频谱的每一条谱线只能出现在基波频率 Ω 的整数倍频率上，即含有 Ω 的各次谐波分量，而不含有非 Ω 的谐波分量。

（3）收敛性，此频谱的各次谐波分量的振幅虽然随 $n\Omega$ 的变化而起伏变化，但总的趋势是随着 $n\Omega$ 的增大而逐渐减小，即当 $n\Omega\to\infty$ 时，$|F_n|\to 0$。

3）周期信号的功率

周期信号的能量是无限的，但其平均功率是有限的，故为功率信号。

周期信号的功率——将周期信号在 1Ω 电阻上消耗的平均功率定义为周期信号的功率，其表达式为

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} \text{（帕塞瓦尔公式）}$$

当 $f(t)$ 为实函数时：

$$P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2=(\frac{A_0}{2})^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}A_n^2$$

证明 $P=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left|\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\right|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}|^2\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$

$$P=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2=|F_0|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|F_n|^2=(\frac{A_0^2}{2})+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2$$



小提醒：

$f(t)$ 的功率为直流功率与各次谐波功率之和。

1.2.2 非周期信号的傅里叶变换

前面已经讲解了周期信号的傅里叶级数，而非周期信号可视为 $T\to\infty$ 的周期信号，但 $T\to\infty$ 时，$\Omega\to 0$，故周期信号频谱的离散性就变成了连续频谱，同时傅里叶级数的公式也不适用，为此引入了非周期信号的傅里叶变换。

1. 傅里叶变换的定义

1）傅里叶变换的变换对

对于任意一个周期信号有 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$$

当 $T\to\infty$ 时，$|F_n|\to 0$，但 TF_n 可趋于有限值，故上式两边同时乘以 T，



$$\therefore TF_n=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$$

而 $T\rightarrow\infty$时，$\Omega=\frac{2\pi}{T}\rightarrow 0$，用 $\mathrm{d}\omega$ 表示，而 $n\Omega$ 这个离散频率变成了连续频率，用 ω 表示，在这种极限之下，TF_n 可趋于有限值，且为一个连续函数，用 $F(\mathrm{j}\omega)$表示，称为频谱函数。

$$\therefore F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{T\rightarrow\infty}TF_n=\lim_{T\rightarrow\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$$

即
$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-34}$$

式(1-34)称为傅里叶正变换。

又由于 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}TF_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\frac{1}{T}$　　而 $T=\frac{2\pi}{\Omega}$

所以
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}TF_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}\frac{\Omega}{2\pi}$$

当 $T\rightarrow\infty$时，Ω 可以用 $\mathrm{d}\omega$ 表示，TF_n 为一个连续函数，

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-35}$$

式(1-35)式称为傅里叶逆变换。

简记为

$$F(\mathrm{j}\omega)=F[f(t)]$$
$$f(t)=F^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)]$$

或
$$f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$$

这里称 $F(\mathrm{j}\omega)$为频谱密度函数，$f(t)$为 $F(\mathrm{j}\omega)$的原函数。

上述变换对存在的条件是正变换表达式积分收敛，即 $f(t)$在无限区间内满足绝对可积条件，表达式如下：

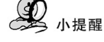
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$$

2) 傅里叶变换的物理意义

(1) 由于称 $F(\mathrm{j}\omega)$为频谱密度函数，它一般为一个复数，故可表示为

$$F(\mathrm{j}\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{1-36}$$

式中：$F(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|$为 $F(\mathrm{j}\omega)$的模，代表 $f(t)$中各频率分量的相对大小；$\varphi(\omega)$为 $F(\mathrm{j}\omega)$的相位，代表 $f(t)$中各频率分量的相位关系；$F(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|$中 ω 的关系曲线称为非周期信号的幅度频谱；$\varphi(\omega)$中 ω 的关系曲线称为非周期信号的相位频谱。


小提醒：

$F(\omega)$、$\varphi(\omega)$都是 ω 的连续函数。

(2) 当 $f(t)$为实函数时：

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t\\&=R(\omega)+\mathrm{j}X(\omega)\end{aligned}$$

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$F(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{R(\omega)^2+X(\omega)^2},\quad \varphi(\omega)=\arg\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

即
$$R(\omega)=F(\omega)\cos\varphi(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\cos\varphi(\omega)$$
$$X(\omega)=F(\omega)\sin\varphi(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|\sin\varphi(\omega)$$


小提醒：

(1) $R(\omega)$、$F(\omega)=|F(\mathrm{j}\omega)|$为$\omega$的偶函数；$X(\omega)$、$\varphi(\omega)$为$\omega$的奇函数。

(2) $f(t)$为t的实偶函数时，$F(\mathrm{j}\omega)$为ω的实偶函数；$f(t)$为t的实奇函数时，$F(\mathrm{j}\omega)$为ω的虚奇函数。

为了证明这个结论，接下来讲解典型信号的傅里叶变换。

2. 典型信号的傅里叶变换

1) 门函数(矩形脉冲)

定义：它就是一个中心位于$t=0$处，幅度为1，宽度为τ的单个矩形脉冲，用$g_\tau(t)$表示，如图1.28所示。

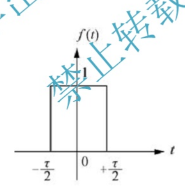


图1.28 门函数

表达式：
$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases} \tag{1-37}$$

其傅里叶变换为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}}{-\mathrm{j}\omega}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{-\mathrm{j}\omega}=\frac{2\sin\dfrac{\omega\tau}{2}}{\omega}=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\therefore g_{\tau}(t) \leftrightarrow \tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{1-38}$$



小提醒：

门函数的频谱函数为实偶函数。

门函数频谱图如图 1.29 所示。

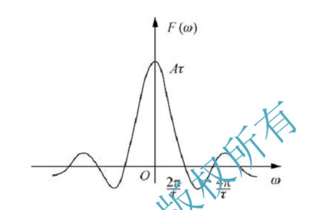


图 1.29　门函数频谱图

2）单边指数函数

表达式：
$$f(t)=\begin{cases} e^{-at}, & t>0,\ a>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{1-39}$$

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned} \tag{1-40}$$

单边指数函数波形图及频谱图如图 1.30 所示。

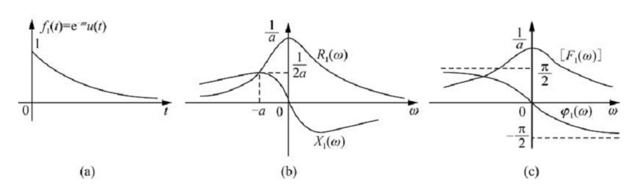


图 1.30　单边指数函数频谱图及波形图

3）偶双边指数函数

表达式：
$$f(t)=e^{-a|t|} \qquad a>0 \tag{1-41}$$

其傅里叶变换为



$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}+\frac{1}{a-\mathrm{j}\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}\end{aligned}\tag{1-42}$$

4）单位冲激函数

其傅里叶变换为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=1\tag{1-43}$$

单位冲激函数波形图及频谱图如图 1.31 所示。

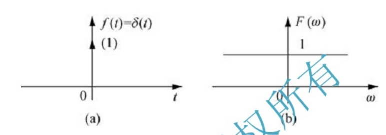


图 1.31　单位冲激函数波形图及频谱图

5）直流信号

表达式：

$$f(t)=1$$

其傅里叶变换为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=2\pi\delta(\omega)\tag{1-44}$$

直流信号波形图及频谱图如图 1.32 所示。

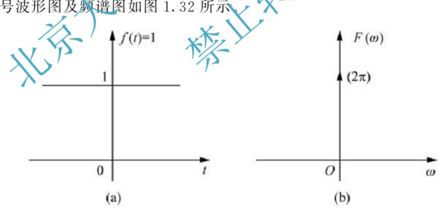


图 1.32　直流信号波形图及频谱图

6）双边指数函数

表达式：

$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-at}, & t>0,\ a>0\\-\mathrm{e}^{at}, & t<0\end{cases}\tag{1-45}$$

其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}F(\mathrm{j}\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{a-\mathrm{j}\omega}=\frac{-2\mathrm{j}\omega}{a^2+\omega^2}\end{aligned}\tag{1-46}$$

7）符号函数

表达式：
$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}+1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases} \tag{1-47}$$

傅里叶变换：将上面的 a 取 0，得到
$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{2}{\mathrm{j}\omega} \tag{1-48}$$

符号函数波形图及频谱图如图 1.33 所示。

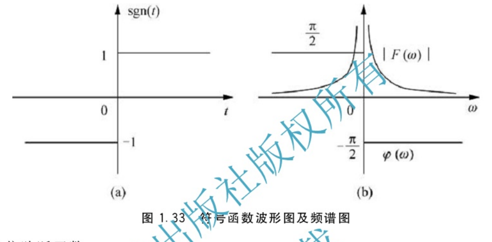


图 1.33 符号函数波形图及频谱图

8）单位阶跃函数

表达式：
$$f(t)=u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \tag{1-49}$$

其傅里叶变换为
$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega} \tag{1-50}$$

单位冲激函数波形图及频谱图如图 1.34 所示。

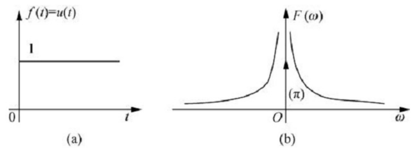


图 1.34 单位冲激函数波形图及频谱图

结论：$f(t)$为 t 的实偶函数时，$F(\mathrm{j}\omega)$为 ω 的实偶函数；$f(t)$为 t 的实奇函数时，$F(\mathrm{j}\omega)$为 ω 的虚奇函数。

3. 傅里叶变换的性质

1）线性

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$，且 a_1、a_2 为常数，则

$$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(\mathrm{j}\omega)+a_2F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{1-51}$$

这个性质是频域分析的基础，它说明几个信号相加后的频谱等于各单独信号的频谱之和。

2）奇偶性质

偶信号的频谱为偶函数，奇信号的频谱为奇函数；实信号的频谱是共轭对称函数，即其实部是偶函数、虚部为奇函数，或其幅度频谱是偶函数，相位频谱为奇函数。

3）对称性

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$F(\mathrm{j}t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{1-52}$$

证明
$$\because f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

将上式中的 t 换为$(-t)$，得到

$$f(-t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

将上式中的 t 换为 ω，ω 换为 t，得到

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$\therefore 2\pi f(-\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

讨论：当 $f(t)$为偶函数时

$$F(\mathrm{j}t)\leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

作用：方便地求某些信号的频谱。

例 1-9 试求信号 $g(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$的傅里叶变换 $G(\omega)$。

解 由于 $\mathrm{e}^{-a|t|}\leftrightarrow\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

当 $a=1$ 时，利用线性和对称性

$$g(t)=\frac{1}{t^2+1}\leftrightarrow G(\omega)=\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}$$

例 1-10 试求取样函数 $\mathrm{Sa}(t)=\dfrac{\sin t}{t}$的频谱函数。

解 由于 $g_\tau(t)\leftrightarrow\tau\mathrm{Sa}(\dfrac{\omega\tau}{2})$，取 $\tau=2$，得到

$$g_\tau(t)\leftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$$

利用对称性有

$$\mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow\pi g_\tau(\omega)=\begin{cases}\pi, & |\omega|<1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$$

4）尺度变换(比例性)

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则对于非零实常数，有

$$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a}) \tag{1-53}$$

式(1-53)表明，若信号 $f(t)$在时间坐标上压缩到原来的$\frac{1}{a}$，那么频谱函数在频率坐标上将展宽 a 倍，同时其幅度减小到原来的$\frac{1}{|a|}$。这一规律称为尺度变换特性，或时频展缩特性。

证明　当 $a>0$ 时，则 $f(at)$的傅里叶变换为

$$F[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

令 $x=at$，则 $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}t$，代入上式，可得

$$F[f(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{(-\mathrm{j}\omega x/a)}\ \frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{1}{a}F(\mathrm{j}\frac{\omega}{a})$$

当 $a<0$ 时，可得

$$F[f(at)]=-\frac{1}{a}F(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a})$$

$$\therefore f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a})$$

当 $a=-1$ 时，可得

$$f(-t)\leftrightarrow F(-\mathrm{j}\omega)\text{（时间倒置定理）}$$

由对称性为

$$F(-\mathrm{j}t)\leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

例 1-11　$\mathrm{e}^{-t}u(t)\rightarrow\frac{1}{\mathrm{j}\omega+1}$，$\mathrm{e}^{-3t}u(t)\rightarrow\frac{1}{\mathrm{j}\,\frac{\omega}{3}+1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3+\mathrm{j}\omega}$

5）时移性（延时特性）

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，且 t_0 为常数，则有

$$f(t\pm t_0)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega t_0} \tag{1-54}$$

式(1-54)表明，在时域中信号沿时间轴右移/左移 t_0，其在频域中所有频率分量相应落后/超前一相位 ωt_0，而其幅度保持不变。

证明　由傅里叶变换的定义可知

$$F[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

令 $x=t-t_0$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$

$$\therefore F[f(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(t_0+x)}\mathrm{d}x=F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

例 1-12　求 $f(at-b)$的频谱函数。

解一　时移 $f(t-b)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega b}$

展缩 $f(at-b)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\mathrm{j}\,\frac{\omega}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}b}$

解二 展缩 $f(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\mathrm{j}\frac{\omega}{a})$

时移 $f(at-b)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\mathrm{j}\frac{\omega}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{a}b}$

例 1-13 求 $f(t)=g_\tau(t)+g_\tau(t+T)+g_\tau(t-T)$的频谱函数。

解 $F[f(t)]=\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})[1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}]T\mathrm{Sa}(\omega T/2)(1+2\cos\omega t)$

6) 频移特性(调制定理)

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则有

$$f(t)\mathrm{e}^{\mp\mathrm{j}\omega_0 t}\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega\pm\mathrm{j}\omega_0) \tag{1-55}$$

式(1-55)表明，将信号 $f(t)$乘以因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$，对应于将频谱函数沿 ω 右移 ω_0；将信号 $f(t)$乘以因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$，对应于将频谱函数沿 ω 左移 ω_0。

证明　由傅里叶变换的定义可知

$$F[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t$$
$$=F[\mathrm{j}(\omega-\omega_0)]$$

频移特性在各类电子系统中应用广泛，如调制等。

调制定理：正弦函数和余弦函数的傅里叶变换如下。

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}]$$

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}]$$

$$F[\cos\omega_0 t]=\pi[\delta(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)+\delta(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)] \tag{1-56}$$

$$F[\sin\omega_0 t]=\frac{\pi}{\mathrm{j}}[\delta(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)-\delta(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)] \tag{1-57}$$

例 1-14 求下列信号的频谱函数。

(1) 求 $f(t)\cos\omega_0 t$、$f(t)\sin\omega_0 t$ 的频谱函数。

$$F[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)+F(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)]$$

$$F[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)-F(\mathrm{j}\omega+\mathrm{j}\omega_0)]$$

上面这两个式子也称为调制定理。

(2) 求 $f(t)=g_\tau(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱函数。

$$F[g_\tau(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}\tau[\mathrm{Sa}\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}+\mathrm{Sa}\frac{(\omega+\omega_0)\tau}{2}]$$

7) 时域卷积定理

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$，则

$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{1-58}$$

证明　$\because f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\therefore F[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}\tau$$
$$=F_2(\mathrm{j}\omega)\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$=F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$$

作用：它将时域、频域紧密相连。在时域分析中零状态响应，已知 $f(t)$、$h(t)$时，则 $y_f(t)=f(t)*h(t)$，$F[y_f(t)]=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$，再反变量计算，省去了卷积的复杂计算。

8）频域卷积定理

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$，则

$$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)\tag{1-59}$$

证明　$F[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\cdot f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}\mathrm{d}\lambda]f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\lambda)t}\mathrm{d}t]\mathrm{d}\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\lambda)F_2(\omega-\lambda)\mathrm{d}\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$$

作用：它用于求取频谱。思考：该公式常用于哪些情况？

9）时域微分

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$f'(t)\leftrightarrow\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)\tag{1-60}$$

证明　由傅里叶反变换的公式有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$f'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$
$$\therefore f'(t)\leftrightarrow\mathrm{j}\omega F(\mathrm{j}\omega)$$

推广

$$\therefore\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}f(t)\leftrightarrow(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)\tag{1-61}$$

例 1-15　求 $\delta'(t)$的频谱函数。

解　$\delta(t)\leftrightarrow 1$　　　$\therefore\delta'(t)\leftrightarrow\mathrm{j}\omega$

10）时域积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega} \tag{1-62}$$

若 $F(0)=0$ 时，则有 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$

证明　由于 $f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = f(t) * u(t)$$

而

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = F(\mathrm{j}\omega)\cdot\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$



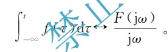
小知识：

时域积分多用于 $F(0)=0$ 的场合，而 $F(0)=0$ 表明 $f(t)$ 的频谱函数中直流分量的频谱密度为 0，即有

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

也就是 $f(t)$ 的波形在 t 轴上下两部分的面积相等。

如果 $F(0)=0$，则有



$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}\text{。}$$

例 1-16　求图 1.35 所示波形的频谱函数。

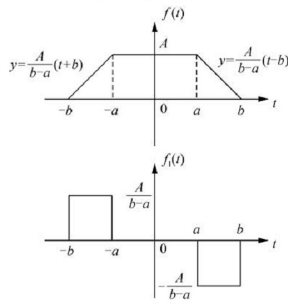


图 1.35　例 1-16 波形



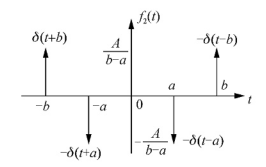


图 1.35 例 1-16 波形(续)

由图可知，$f_2(t)=f_1'(t)=f''(t)$，由于 $f_2(t)$ 上下面积相等，故 $F_2(0)=0$。

$$F_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{A}{b-a}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega b}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega b}]$$

$$=\frac{2A}{b-a}[\cos\omega b-\cos\omega a]$$

$$\therefore F_1(\mathrm{j}\omega)=\frac{2A}{\mathrm{j}\omega(b-a)}[\cos\omega b-\cos\omega a]$$

$$\therefore F(\mathrm{j}\omega)=\frac{2A}{\omega^2(b-a)}[\cos\omega a-\cos\omega b]$$

11）频域微分

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$(-\mathrm{j}t)f(t)\leftrightarrow F'(\mathrm{j}\omega) \tag{1-63}$$

推广

$$(-\mathrm{j}t)^n f(t)\leftrightarrow F^{(n)}(\mathrm{j}\omega) \tag{1-64}$$

12）频域积分

若 $f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则

$$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{d}\Omega \tag{1-65}$$

式中：

$$f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{d}\omega \tag{1-66}$$

如果 $f(0)=0$，则有

$$\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\omega}F(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{d}\Omega \tag{1-67}$$

例 1-17 证明下列傅里叶变换对成立

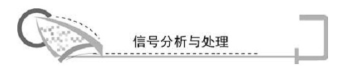
(1) $t^n\leftrightarrow 2\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\omega)$

(2) $t^n u(t)\leftrightarrow\dfrac{n!}{(\mathrm{j}\omega)^{n+1}}+\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\omega)$

证明 (1)由于 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)=\delta(\omega)$

由微分性质可得：$(-\mathrm{j}t)^n\dfrac{1}{2\pi}\leftrightarrow\delta^{(n)}(\omega)$ $\quad t^n\leftrightarrow 2\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\omega)$

(2) 由于频域卷积定理有 $t^n u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{2\pi}F[t^n]*F[u(t)]$



且
$$t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$$
$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$
推导可得
$$t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{(j\omega)^{n+1}} + \pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$$

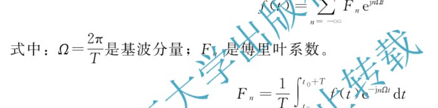

思考：

$\int_0^\infty \frac{\sin(a\omega)}{\omega} d\omega$ 的值怎么求？

4. 周期信号的傅里叶变换

由于周期信号不满足绝对可积条件，因此只有在频谱中引入冲激函数后，其傅里叶变换才存在。

1）一般周期函数的傅里叶变换

对于一般周期为 T 的周期信号 $f(t)$，其指数形式的傅里叶级数展开式为
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$


式中：$\Omega = \frac{2\pi}{T}$是基波分量；F_n是傅里叶系数。
$$F_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$
对指数形式的傅里叶级数展开式两边取傅里叶变换，整理可以得到
$$F[f(t)] = F\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F[e^{jn\Omega t}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\Omega) \qquad (1-68)$$
上式表明：一般周期函数的傅里叶变换是由无穷多个冲激函数组成的，且这些冲激函数位于 $n\Omega$（n 为整数）处，其强度为相应傅里叶级数系数 F_n 的 2π 倍。

例 1-18 周期性矩形脉冲信号 $p_T(t)$，如图 1.36 所示，其周期为 T，脉冲宽度为 τ，幅度为 1，试求其频谱函数。

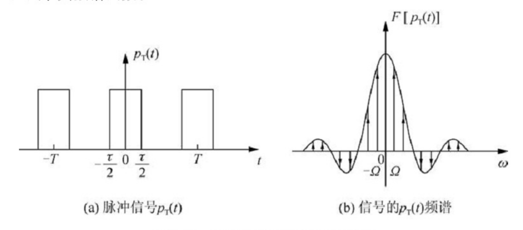


图 1.36 周期矩形脉冲信号及其频谱



解　利用周期信号傅里叶级数公式可以求得1.36(a)图所示周期性矩形脉冲信号 $f(t)=p_T(t)$ 的傅里叶系数为

$$F_n=\frac{\tau}{T}\mathrm{Sa}(\frac{n\Omega t}{2})$$

代入公式 $F[f(t)]=F[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_nF[\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\Omega)$

得到

$$F[p_T(t)]=\frac{2\tau\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\Omega t}{2})\delta(\omega-n\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin(\frac{n\Omega t}{2})}{n}\delta(\omega-n\Omega)\quad \Omega=\frac{2\pi}{T}$$

可见，周期矩形脉冲信号 $f(t)=p_T(t)$ 的傅里叶变换由位于 $\omega=0$，$\pm\Omega$，$\pm2\Omega$，… 处的冲激函数所组成，其在 $\omega=n\Omega$ 处的强度为$\frac{2\sin(\frac{n\Omega t}{2})}{n}$。图1.36(b)给出了 $T=4\tau$ 情况下的频谱图，由频谱图可见周期信号的频谱密度是离散的。

小提醒：

虽然从频谱的图形看，这里的 $F(\mathrm{j}\omega)$ 与前面的 F_n 是极相似的，但是二者的含义不同。当对周期函数进行傅里叶变换时得到的是频谱，而将该函数展开为傅里叶级数时，得到的是傅里叶系数。

例1-19　图1.37所示为周期为 T 的周期性单位脉冲函数序列 $\delta_T(t)$

$$\delta_T(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(t-mT)\qquad m\text{ 为整数}$$

试求其傅里叶变换。

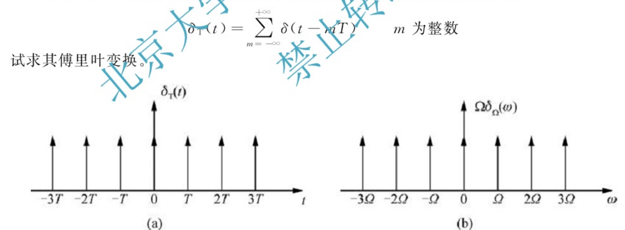


图1.37　周期脉冲序列及其傅里叶变换

解　首先求出周期性脉冲函数序列的傅里叶系数：

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

由图1.37所示，$\delta_T(t)$在区间$\left(-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right)$只有一个冲激函数 $\delta(t)$。利用冲激函数的筛选性质，上式可化简为

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}$$

为此得到 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换为

$$F[\delta_T(t)]=\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)=\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)$$

2）傅里叶系数与傅里叶变换

若从周期信号中截取一个周期，得到单脉冲信号，设为 $f_0(t)$，它的傅里叶变换为

$$F_0(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

比较傅里叶级数系数公式

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

可以得到

$$F_n=\frac{1}{T}F_0(\mathrm{j}\omega)\big|_{\omega=n\omega_1} \tag{1-69}$$

这表示，傅里叶变换中的许多性质、定理也可以用于傅里叶级数，这提供了一种求周期信号傅里叶系数的方法。

1.3 连续信号的复频域分析

连续信号的复频域分析即是对信号进行拉普拉斯变换，把信号描述为众多不同复频率的复指数信号分量。拉普拉斯变换可以理解为一种广义的傅里叶变换，它将频域扩展为复频域，从而简化了信号的变换式，扩大了信号变换的范围，并在信号处理和系统分析方面具有重要的作用。

1.3.1 拉普拉斯变换的定义与收敛域

1. 由傅里叶变换到拉普拉斯变换

从 1.2 的讲解可知道，当函数 $f(t)$ 满足狄里赫利条件时，可以求得其傅里叶变换 $F(\mathrm{j}\omega)$：

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

而狄里赫利条件之一就是信号 $f(t)$ 得满足绝对可积条件。而通过引入冲激函数或极限处理，对某些不满足上述条件的信号，如直流信号、周期信号等仍可以求得其傅里叶变换，但是某些信号如指数增长型，其傅里叶变换就不存在，不存在的原因就是因为当 $t\to\infty$ 时，信号 $f(t)$ 不收敛于 0。因此若乘以一衰减因子 $\mathrm{e}^{-\sigma t}$（其中 σ 为任意实数），若 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$ 收敛，且可以满足狄里赫利条件，则

$$\begin{aligned}F[f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}]&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t\\&=F[\sigma+\mathrm{j}\omega]\end{aligned}$$

令 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，称为复频率，则上式可以写成

$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad (1-70)$$

对式(1－70)作傅里叶逆变换为

$$f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[\sigma+\mathrm{j}\omega]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

等式两边同时乘以 $\mathrm{e}^{\sigma t}$，则得到

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F[\sigma+\mathrm{j}\omega]\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}\omega$$

令 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，则得到拉普拉斯逆变换公式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \qquad (1-71)$$

式(1－70)与式(1－71)形成一个变换对，称为双边拉普拉斯变换对。

对于实际的信号，通常都有它的起始时刻，且起始时刻通常设为坐标原点。这样可得到

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad (1-72)$$


小提醒：

考虑到 $f(t)$中可能包含冲激函数及其各阶导数，式中积分下限往往取 0_-。

对应的拉普拉斯逆变换为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \qquad t>0 \qquad (1-73)$$

式(1－72)与式(1－73)形成一个变换对，称为单边拉普拉斯变换对。记作

$$f(t)\overset{\mathrm{LT}}{\leftrightarrow}F(s) \quad 或 \quad L[f(t)]=F(s) \qquad (1-74)$$

拉普拉斯变换和傅里叶变换定义的表示形式相似，且它们的性质也有许多相同之处。但它们也有一些区别：$f(t)$的傅里叶变换为 $F(\mathrm{j}\omega)$，它是把时间函数 $f(t)$变换为频域函数 $F(\mathrm{j}\omega)$，时间变量 t 和频率变量 ω 都是实数；而 $f(t)$的拉普拉斯变换为 $F(s)$，它是把时间函数 $f(t)$变换为复变函数 $F(s)$，时间变量 t 是实数，而 s 是复数；ω 仅能描述振荡的重复频率，而 s 不仅能给出振荡的频率，还可以表示振幅增长或衰减的速率。

2. 双边拉普拉斯变换的收敛域

任一个信号 $f(t)$的拉普拉斯变换都可从傅里叶变换得到，即实际上是 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$的傅里叶变换，由于傅里叶变换不一定存在，故双边拉普拉斯变换也不一定存在，为了使 $F(s)$存在，常使 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{d}t<\infty$，而 σ 为 s 的实部 σ，故 $F(s)$存在与否取决于 s 的实部 σ，也就是找一个合适的 σ，使 $f(t)\mathrm{e}^{-\sigma t}$收敛。通常将拉普拉斯变换 $F(s)$存在的 σ 的取值范围称为 $F(s)$的收敛域，简记为 ROC 或 Re[s]。

可见 $F(s)$的收敛域是由 s 的实部 σ 决定的，与虚部 $\mathrm{j}\omega$ 无关，故 $F(s)$的收敛域的边界是平行于 $\mathrm{j}\omega$ 轴的直线，而如何确定 σ，由 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{d}t<\infty$ 来决定。

例 1-20 求信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-b|t|}$ 的双边拉普拉斯变换 $F(s)$ 及 $F(s)$ 的收敛域。

解
$$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-b|t|}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{bt}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(b-s)t}\mathrm{d}t+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-(b+s)t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{(b-s)t}\Big|_{-\infty}^{0}}{b-s}+\frac{\mathrm{e}^{-(b+s)t}\Big|_{0}^{+\infty}}{-(b+s)}$$
$$=\frac{1}{b-s}+\frac{-1}{-(b+s)}$$
$$=\frac{2b}{b^2-s^2}$$

收敛域由 $F(s)$ 的第一项可知为 $\sigma<b$，第二项可知为 $\sigma>-b$

所以收敛域为 $-b<\sigma<b\,(b>0)$

$$\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{bt}\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{d}t<\infty\Rightarrow\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(b-\sigma)t}\mathrm{d}t<\infty$$
$$\Rightarrow b-\sigma>0\Rightarrow\sigma<b$$
$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-bt}\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{d}t<\infty\Rightarrow\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(b+\sigma)t}\mathrm{d}t<\infty$$
$$\Rightarrow b+\sigma>0\Rightarrow\sigma>-b$$

例 1-21 已知 $f_1(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$ 其中 $a>0$，$f_2(t)=-\mathrm{e}^{-at}u(-t)$，$a>0$，求 $F_1(s)$、$F_2(s)$ 及其收敛域。

解
$$F_1(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}u(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a+s)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a+s}$$

$F_1(s)$ 的收敛域为

$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{d}t<\infty\Rightarrow\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(a+\sigma)t}\mathrm{d}t<\infty$$
$$\Rightarrow a+\sigma>0\Rightarrow\sigma>-a$$
$$F_2(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}-\mathrm{e}^{-at}u(-t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\infty}^{0}-\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(a+s)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a+s}$$
$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{d}t<\infty\Rightarrow\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(a+\sigma)t}\mathrm{d}t<\infty$$
$$\Rightarrow a+\sigma<0\Rightarrow\sigma<-a$$


小提醒：

(1) 因果信号的绝对收敛域位于某一条垂线以右。



（2）非因果信号的绝对收敛域位于某一条垂线以左。

（3）双边信号的绝对收敛域位于某两条垂线之间。

下面介绍几种常用信号的收敛域。

（1）单个脉冲信号 $\delta(t)$：整个 s 平面，写成 $\sigma<\infty$ 或 $\sigma>-\infty$。

（2）单位阶跃信号 $u(t)$：$\sigma>0$，即 s 平面的右半个平面。

（3）指数函数 e^{at}：$\sigma>a$。

例 1－22　求下列信号的单边拉普拉斯变换收敛域。

（1）$u(t)-u(t-\tau)$　　（2）$u(t)$

（3）$\sin(\omega_0 t)u(t)$　　（4）$tu(t)$，$t^n u(t)$

（5）$e^{3t}u(t)$　　（6）$t^t u(t)$，$e^{t^2}u(t)$

解　（1）$u(t)-u(t-\tau)$ 为 $0<t<\tau$ 时间范围内的单个脉冲信号，故其收敛域为整个 s 平面，写成 $\sigma<\infty$ 或 $\sigma>-\infty$。

（2）$u(t)$的收敛域为 $\sigma>0$，即 s 平面的右半个平面。

（3）$\sin(\omega_0 t)u(t)$的收敛域为 $\sigma>0$，即 s 平面的右半个平面。

（4）$tu(t)$，$t^n u(t)$的收敛域为 $\sigma>0$，即 s 平面的右半个平面。

（5）$e^{3t}u(t)$的收敛域为 $\sigma>3$。

（6）$t^t u(t)$，$e^{t^2}u(t)$的收敛域不存在。

1.3.2　典型信号的单边拉普拉斯变换

本处将介绍一些常见信号的单边拉普拉斯变换。

1. 冲激信号 $\delta(t)$

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{0_-}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=1 \tag{1-75}$$

2. 阶跃信号 $u(t)$

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{0_-}^{\infty}u(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s} \tag{1-76}$$

3. 指数信号 $e^{-at}u(t)$和 $e^{at}u(t)$

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s+a} \tag{1-77}$$

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty} e^{at}u(t)e^{-st}dt=\frac{1}{s-a} \tag{1-78}$$

4. $\sin\omega_0 tu(t)$和 $\cos\omega_0 tu(t)$

由欧拉公式可得 $\begin{cases}\cos\omega t=\dfrac{1}{2}(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t})\\ \sin\omega t=\dfrac{1}{2j}(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})\end{cases}$

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}\cos\omega_0 tu(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{1-79}$$

$$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}\sin\omega_0 tu(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t=\frac{\omega}{s^2+\omega^2} \tag{1-80}$$

5. 单边衰减信号 $\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 tu(t)$ 和 $\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 tu(t)$

由于 $\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 tu(t)=\frac{1}{2}[(\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{j}\omega_0)t}+\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega_0)t})u(t)]$

可得

$$\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 tu(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{1-81}$$

$$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 tu(t)\leftrightarrow\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \tag{1-82}$$

1.3.3 拉普拉斯变换的性质

1. 线性

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(s)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(s)$，且 a_1、a_2 为常数；则

$$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1F_1(s)+a_2F_2(s) \tag{1-83}$$

它是复频域分析的基础。

2. 时移性(延时特性)

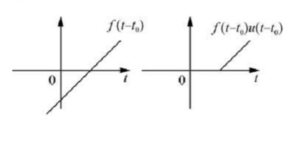
若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，且 t_0 为常数，则有

$$f(t-t_0)u(t-t_0)\leftrightarrow F(s)\mathrm{e}^{-st_0}\ (t_0>0) \tag{1-84}$$



小知识：

对于 $f(t-t_0)$、$f(t-t_0)u(t)$、$f(t-t_0)u(t-t_0)$、$f(t)u(t-t_0)$ 信号的图形不同，而对于因果信号 $f(t-t_0)u(t-t_0)=f(t-t_0)$，它们图形如图 1.38 所示。



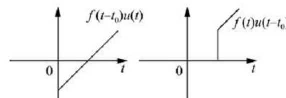


图 1.38　$f(t-t_0)$、$f(t-t_0)u(t)$、$f(t-t_0)u(t-t_0)$、$f(t)u(t-t_0)$ 信号的图形

例 1-23 设 $f(t)=t$，因而 $F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{s^2}$，试求上面 4 个图的象函数。

(1) $f(t-t_0)=t-t_0$

解 $L[f(t-t_0)]=\int_0^{\infty} f(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t-\int_0^{\infty} t_0\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1-st_0}{s^2}$$

(2) $f(t-t_0)u(t)=(t-t_0)u(t)$

解 $L[f(t-t_0)]=\int_0^{\infty} f(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}(t-t_0)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t-\int_0^{\infty} t_0\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1-st_0}{s^2}$$

(3) $f(t)u(t-t_0)=tu(t-t_0)$

解 $L[f(t-t_0)]=L[(t-t_0)u(t-t_0)+t_0u(t-t_0)]$

$$=L[(t-t_0)u(t-t_0)]+L[t_0u(t-t_0)]=\frac{\mathrm{e}^{-st_0}}{s^2}+\frac{t_0\mathrm{e}^{-st_0}}{s}$$

(4) $f(t-t_0)u(t-t_0)=(t-t_0)u(t-t_0)$

解 $L[(t-t_0)u(t-t_0)]=\frac{\mathrm{e}^{-st_0}}{s^2}$

例 1-24 求图 1.39 所示波形的象函数。

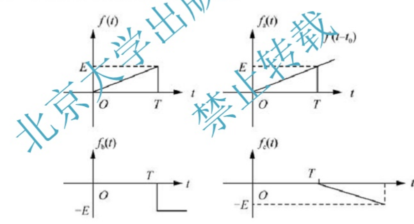


图 1.39 例 1-24 波形

解

$$f(t)=f_a(t)+f_b(t)+f_c(t)=\frac{Et}{T}[u(t)-u(t-T)]$$

$$=\frac{Et}{T}u(t)-\frac{Et}{T}u(t-T)$$

$$=\frac{Et}{T}u(t)-\frac{E}{T}(t-T)u(t-T)-\frac{E}{T}Tu(t-T)$$

$$F(s)=\frac{E}{T}\frac{1}{s^2}-\frac{E}{T}\frac{\mathrm{e}^{-sT}}{s^2}-E\frac{\mathrm{e}^{-sT}}{s}$$

$$=\frac{E}{Ts^2}[1-\mathrm{e}^{-sT}-TS\mathrm{e}^{-sT}]$$

例 1-25 已知 $f_1(t)=e^{-2(t-1)}u(t-1)$，$f_2(t)=e^{-2(t-1)}u(t)$，求 $f_1(t)+f_2(t)$的象函数。

解 $e^{-at}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{s+a}$，$e^{-a(t-1)}u(t-1)\leftrightarrow\dfrac{e^{-s}}{s+a}$

$$f_1(t)=e^{-2(t-1)}u(t-1)\leftrightarrow\frac{e^{-s}}{s+2}$$

$$f_2(t)=e^{-2(t-1)}u(t)=e^2e^{-2t}u(t)$$

$$e^2e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{e^2}{s+2}$$

$$\therefore F(s)=\frac{e^{-s}+e^2}{s+2}$$

例 1-26 求起始周期脉冲信号 $\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$的拉普拉斯变换。

解 周期脉冲信号可以写成 $\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)=\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\cdots$，由 $\delta(t)\leftrightarrow 1$ 和时移性质可得 $\delta(t-nT)\leftrightarrow e^{-snT}$，所以有

$$L[\delta_T(t)]=1+e^{-sT}+e^{-s2T}+e^{-s3T}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

推广到任意起始周期信号有如下公式：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_1(t-nT)\leftrightarrow F(s)=\frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_1(t-nT)\leftrightarrow F(s)=\frac{F_1(s)}{1+e^{-sT}}$$

其中 $f_1(t)$是起始周期信号 $f(t)$的第一个周期。

3. 尺度变换(比例性)

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，则对于非零实常数，有

$$f(at)\leftrightarrow\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad(a>0)\tag{1-85}$$

例 1-27 若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，求 $f(at-b)$的象函数。

$$f(at-b)\leftrightarrow\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)e^{-\frac{s}{a}b}$$

4. 复频移特性

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，则有

$$f(t)e^{\mp s_0t}\leftrightarrow F(s\pm s_0)\tag{1-86}$$

例 1-28 求 $f(t)\cos\omega_0tu(t)$和 $f(t)\sin\omega_0tu(t)$的象函数

$$\cos\omega_0t=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0t}+e^{-j\omega_0t}]$$

$$\sin\omega_0t=\frac{1}{2j}[e^{j\omega_0t}-e^{-j\omega_0t}]$$



$$L[f(t)\cos\omega_0 t]=\frac{1}{2}[F(s-s_0)+F(s+s_0)]=\frac{1}{2}[F(s-\mathrm{j}\omega_0)+F(s+\mathrm{j}\omega_0)]$$

$$L[f(t)\sin\omega_0 t]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(s-s_0)-F(s+s_0)]=\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(s-\mathrm{j}\omega_0)-F(s+\mathrm{j}\omega_0)]$$

例 1-29 求 $\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 tu(t)$的象函数(两种方法解)。

解一 先利用指数函数的拉氏变换，再利用复频移性质

$$\mathrm{e}^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}$$

$$\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 tu(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{s-\mathrm{j}\omega_0+a}-\frac{1}{s+\mathrm{j}\omega_0+a}\right]=\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0{}^2}$$

解二 先利用三角函数的拉氏变换，再利用复频移性质

$$\sin\omega_0 tu(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0{}^2}$$

$$\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 tu(t)\leftrightarrow\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0{}^2}$$

思考：$\mathrm{e}^{-at}\cos\omega_0 tu(t)$的象函数为多少?

5. 时域微分

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，则有

$$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0_-) \tag{1-87}$$

和
$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow s^n F(s)-s^{n-1}f(0_-)-s^{n-2}f'(0_-)-\cdots-f^{(n-1)}(0_-) \tag{1-88}$$

式中：$f(0_-)$和 $f^{(k)}(0_-)$分别表示 $t=0_-$时 $f(t)$和 $f^{(k)}(t)$的值。

若 $f(t)$为有始函数，$f(0_-)$及其各阶导数为 0，则有

$$f'(t)\leftrightarrow sF(s)$$
$$f^{(n)}(t)\leftrightarrow s^n F(s)$$

证明 由拉氏变换的定义有

$$L[f'(t)]=\int_{0-}^{\infty}f'(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}f(t)$$
$$=f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_{0-}^{\infty}-\int_{0-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}(-s)\mathrm{d}t$$
$$=sF(s)-f(0^-)$$

即应用分步积分法，则有

$$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0_-)$$

例 1-30 求 $f_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]$和 $f_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}]u(t)$的象函数 $F_1(s)$、$F_2(s)$。

解 $f_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]$中 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

$$\mathrm{e}^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+2}\quad\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]\leftrightarrow\frac{s}{s+2}$$

而 $f_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-2t}]u(t)=-2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

$$-2e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{-2}{s+2}$$

6. 时域积分

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，则

1）积分区间为 $0\sim t$（即因果信号）

$$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}\tag{1-89}$$

$$\left(\int_0^t\right)^n f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s^n}\tag{1-90}$$

2）积分区间为 $-\infty\sim t$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}\tag{1-91}$$

$$\left(\int_{-\infty}^t\right)^2 f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s^2}+\frac{f^{(-1)}(0^-)}{s^2}+\frac{f^{(-2)}(0^-)}{s}\tag{1-92}$$

$$\left(\int_{-\infty}^t\right)^n f(\tau)\mathrm{d}\tau\leftrightarrow\frac{F(s)}{s^n}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{s^{n-m+1}}f^{(-m)}(0_-)\tag{1-93}$$

证明 $L\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]=\int_{0-}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x\right]e^{-st}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\Bigg|_{0-}^{\infty}+\int_{0-}^{\infty}\frac{e^{-st}}{s}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0-}f(\tau)\mathrm{d}\tau+\frac{1}{s}\int_{0-}^{\infty}f(\tau)e^{-s\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}+\frac{F(s)}{s}$$

例 1-31 （1）试利用 $u(t)$ 的积分来求 $tu(t)$ 和 $t^n u(t)$ 的象函数。

$$u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$$

$$tu(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^2}$$

$$t^n u(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$$

（2）求图 1.40 所示波形的象函数。

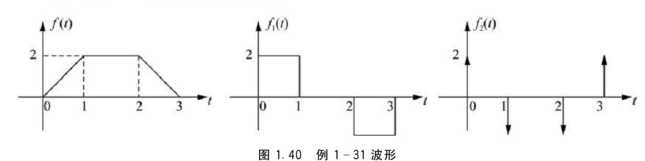


图 1.40 例 1-31 波形

解　由时域积分性质有

$$F_1(s)=\frac{F_2(s)}{s},\ F(s)=\frac{F_1(s)}{s}$$

而

$$f_2(t)=2[\delta(t)-\delta(t-1)-\delta(t-2)+\delta(t-3)]$$
$$F_2(s)=2(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})$$

所以

$$F(s)=\frac{2}{s^2}(1-e^{-s}-e^{-2s}+e^{-3s})$$

7. 复频域微分与积分

若　$f(t)\leftrightarrow F(s)$，则

复频域微分：
$$tf(t)\leftrightarrow-\frac{dF(s)}{ds} \tag{1-94}$$

复频域积分：
$$\frac{f(t)}{t}\leftrightarrow\int_s^{\infty}F(s)ds \tag{1-95}$$

8. 初值定理

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，且$\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在，则 $f(t)$的初值为

$$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s) \tag{1-96}$$

证明　利用时域微分性质

$$\begin{aligned}sF(s)-f(0_-)&=L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]\\&=\int_{0-}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt\\&=\int_{0-}^{0+}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt+\int_{0+}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt\end{aligned}$$

由于第一项积分限为 $0_-\to0^+$，在整个积分区间内 $t=0$，所以

$$\begin{aligned}sF(s)-f(0_-)&=\int_{0-}^{0+}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt+\int_{0+}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt\\&=f(t)\Big|_{0-}^{0+}+\int_{0+}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt\end{aligned}$$

所以　$sF(s)=f(0^+)+\int_{0+}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$

两边取极限$\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)=f(0^+)$

9. 终值定理

若 $f(t)\leftrightarrow F(s)$，且$\lim\limits_{s\to0}sF(s)$、$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$存在，则 $f(t)$的终值为

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s) \tag{1-97}$$

证明　利用时域微分性质





$$sF(s)-f(0_-)=L\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$
$$=\int_{0_-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

两边取极限 $\lim\limits_{s\to 0}[sF(s)-f(0_-)]=\lim\limits_{s\to 0}\int_{0_-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$

$$\lim_{s\to 0}[sF(s)-f(0_-)]=\lim_{s\to 0}\int_{0_-}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\lim_{t\to\infty}[f(t)-f(0_-)]$$

所以 $\lim\limits_{s\to 0}[sF(s)-f(0_-)]=\lim\limits_{t\to\infty}[f(t)-f(0_-)]$

即 $f(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)$


小提醒：

$\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$存在的条件是$F(s)$所有的极点位于$s$平面的左半平面或在原点、虚轴为一阶单极点。

10. 时域、复频域卷积定理

若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(s)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(s)$，则

时域卷积
$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(s)F_2(s) \tag{1-98}$$
或
$$L^{-1}[F_1(s)F_2(s)]\leftrightarrow f_1(t)*f_2(t)$$
复频域卷积
$$f_1(t)\cdot f_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}F_1(s)*F_2(s) \tag{1-99}$$
或
$$L^{-1}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}F_1(s)*F_2(s)\right]\leftrightarrow f_1(t)\cdot f_2(t)$$

1.3.4 拉普拉斯反变换

从象函数$F(s)$求原函数$f(t)$的过程称为拉普拉斯逆变换。简单的拉普拉斯逆变换只要利用常见信号的拉普拉斯变换和拉普拉斯变换的性质便可以得到。对于复杂象函数的反变换，通常有两种方法：一种是直接利用拉普拉斯反变换定义式计算积分，这种方法称为围线积分法；另一种方法称为部分分式展开法。前者是直接进行围线积分，适用范围广；后者无需积分运算，求解过程大大简化，但仅仅适合于$F(s)$为有理函数的情况。下面仅介绍部分分式展开法。

假设$F(s)$为一个有理分式，故$F(s)$可表示为如下：

$$F(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+b_{m-2}s^{m-2}+\cdots b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots a_1 s+a_0}$$

即分子是s的m次多项式，分母是s的n次多项式，当$m<n$时，$F(s)$为真分式；当$m\geqslant n$时，$F(s)$为假分式，可用长除法分解为真分式和有理多项式之和，即

$$F(s)=P(s)+\frac{B(s)}{A(s)}$$

式中$P(s)=k_{m-n}s^{m-n}+\cdots+k_2 s^2+k_1 s+k_0$(系数$k_i$为实数)，$\frac{B(s)}{A(s)}$为真分式。由于$P(s)$

的拉普拉斯逆变换为冲激函数及其各阶导数组成，可以直接求得，即

$$k_{m-n}s^{m-n}+\cdots+k_2s^2+k_1s+k_0\leftrightarrow k_{m-n}\delta^{(m-n)}(t)+\cdots+k_2\delta^{(2)}(t)+k_1\delta^{(1)}(t)+k_0\delta(t)$$

所以求 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换关键是考虑真分式 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 的拉普拉斯逆变换。下面着重讨论 $F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$ 为真分式的情形。

将 $F(s)$ 展开成部分分式，必须先求出 $A(s)=0$ 的 n 个根 $\lambda_i(i=1，2，\cdots，n)$，$\lambda_i$ 又称为 $F(s)$ 的极点。这 n 个根可能是单根，也可能是重根；可能是实根，也可能是复根。下面分几种情况讨论。

1）$F(s)$ 仅有单极点（单实根）

当 $A(s)=0$ 仅含有 n 个单实根 λ_i 时，

$$F(s)=\frac{B(x)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}=\frac{k_1}{(s-\lambda_1)}+\frac{k_2}{(s-\lambda_2)}+\cdots+\frac{k_n}{(s-\lambda_n)}$$

（1）如何求 k_1，k_2，…，k_n。

$$k_j=F(s)\cdot(s-\lambda_j)\big|_{s=\lambda_j}，\ j=1，2，\cdots，n$$

（2）依据常见信号的拉普拉斯变换 $e^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a}$，得到

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}k_ie^{\lambda_it}u(t)$$

例 1-32　求 $F(s)=\frac{5s+6}{s^3+5s^2+6s}$ 的部分分式展开式。

解　$F(s)=\frac{5s+6}{s^3+5s^2+6s}=\frac{5s+6}{s(s+2)(s+3)}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+2}+\frac{k_3}{s+3}$

$$k_1=F(s)\cdot s\big|_{s=0}=1$$

$$k_2=F(s)\cdot(s+2)\big|_{s=-2}=2$$

$$k_3=F(s)\cdot(s+3)\big|_{s=-3}=-3$$

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{2}{s+2}-\frac{3}{s+3}$$

得到 $f(t)=u(t)+2e^{-2t}u(t)-3e^{-3t}u(t)$

2）$F(s)$ 仅有重极点（重实根）

当 $A(s)=0$ 在 $s=s_1$ 处有 r 重根，其余 $n-r$ 个为单实根时，

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s-\lambda_1)^r(s-\lambda_{r+1})\cdots(s-\lambda_n)}$$

$$=\frac{k_{1r}}{(s-\lambda_1)^r}+\frac{k_{1r-1}}{(s-\lambda_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{k_{11}}{(s-\lambda_1)^1}+\frac{k_{r+1}}{(s-\lambda_{r+1})}+\cdots+\frac{k_n}{(s-\lambda_n)}$$

（1）如何求 k_{1i}。

$$k_{1r}=F(s)\cdot(s-\lambda_1)^r\big|_{s=\lambda_1}$$

$$k_{1r-1}=\frac{d}{ds}[F(s)\cdot(s-\lambda_1)^r]\big|_{s=\lambda_1}$$

$$\vdots$$

$$k_{1i}=\frac{1}{(s-i)!}\frac{\mathrm{d}^{(r-i)}}{\mathrm{d}s^{(r-i)}}[F(s)\cdot(s-\lambda_1)^r]|_{s=\lambda_1}$$

(2) 如何求 k_j：方法同上。

(3) 依据常见信号的拉普拉斯变换：

$$\mathrm{e}^{at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-a},\quad \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^i},\quad \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\mathrm{e}^{s_i t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s-s_i)^i}$$

得到

$$F(s)\leftrightarrow\sum_{i=1}^{r}\frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\mathrm{e}^{s_i t}u(t)+\sum_{i=r+1}^{n}k_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}u(t)$$

例 1-33 求 $F(s)=\frac{4s^3+16s^2+23s+13}{(s+1)^3(s+2)}$的部分分式展开式。

解 $F(s)=\frac{4s^3+16s^2+23s+13}{(s+1)^3(s+2)}=\frac{k_{13}}{(s+1)^3}+\frac{k_{12}}{(s+1)^2}+\frac{k_{11}}{s+1}+\frac{k_4}{s+2}$

$$k_{13}=F(s)\cdot(s+1)^3|_{s=-1}=2$$

$$k_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[F(s)\cdot(s+1)^3]|_{s=-1}=1$$

$$k_{11}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}[F(s)\cdot(s+1)^3]|_{s=-1}=3$$

$$k_4=F(s)\cdot(s+2)|_{s=-2}=1$$

$$F(s)=\frac{2}{(s+1)^3}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{3}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

得到 $f(t)=t^2\mathrm{e}^{-t}u(t)+t\mathrm{e}^{-t}u(t)+3\mathrm{e}^{-t}u(t)+\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

3) $F(x)$仅有单复极点(单复根)

设 $F(s)=\frac{B(s)}{(s-\lambda)(s-\lambda^*)}=\frac{k_1}{(s-\lambda)}+\frac{k_2}{(s-\lambda^*)}$

(1) 如何求 k_1，k_2。

$$k_1=F(s)\cdot(s-\lambda)|_{s=\lambda}=\frac{B(\lambda)}{(\lambda-\lambda^*)}$$

$$k_2=F(s)\cdot(s-\lambda^*)|_{s=\lambda^*}=\frac{B(\lambda^*)}{(\lambda^*-\lambda)}$$

由于对于任何一个复数有$(\lambda^*-\lambda)^*=\lambda-\lambda^*$

$N(\lambda)$为 s 的实系数多项式，$N^*(\lambda)=N(\lambda^*)$

$$\therefore k_1=k_2^*,\ 令\ k_1=|k_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi},\ k_1=k_2^*=|k_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

$$\therefore F(s)=\frac{|k_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}{(s-\lambda)}+\frac{|k_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{(s-\lambda^*)}=\frac{|k_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}{(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)}+\frac{|k_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{(s+\alpha+\mathrm{j}\beta)}$$

(2) 整理得到逆变换表达式。

$$\begin{aligned}f(t)&=|k_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{-(\alpha-\mathrm{j}\beta)t}u(t)+|k_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)t}u(t)\\&=|k_1|\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta t+\varphi)}u(t)+|k_1|\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta t+\varphi)}u(t)\\&=2|k_1|\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t+\varphi)u(t)\end{aligned}$$



例 1-34 求 $F(s)=\dfrac{2s+3}{(s+1)(s^2+4s+5)}$的部分分式展开式。

解 $F(s)=\dfrac{2s+3}{(s+1)(s^2+4s+5)}=\dfrac{k_1}{s+1}+\dfrac{k_2}{s+2-\mathrm{j}}+\dfrac{k_3}{s+2+\mathrm{j}}$

$$k_1=F(s)\cdot(s+1)\big|_{s=-1}=\frac{1}{2}$$

$$k_2=F(s)\cdot(s+2-\mathrm{j})\big|_{s=-2+\mathrm{j}}=0.79\mathrm{e}^{-\mathrm{j}108.4}$$

$$k_3=k_2^*=F(s)\cdot(s+2+\mathrm{j})\big|_{x=-2-\mathrm{j}}=0.79\mathrm{e}^{\mathrm{j}108.4}$$

$$F(s)=\frac{\frac{1}{2}}{s+1}+\frac{0.79\mathrm{e}^{-\mathrm{j}108.4}}{s+2-\mathrm{j}}+\frac{0.79\mathrm{e}^{\mathrm{j}108.4}}{s+2+\mathrm{j}}$$

所以 $f(t)=1.58\mathrm{e}^{-2t}\cos(t+108.4)u(t)+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}u(t)$

4) $F(x)$仅有重极点(重复根)(以 2 重为例)

若 $F(s)$在 $s=\lambda$(复数)处有 2 重根，则 $s=\lambda^*$(复数)处也有 2 重根：$\lambda_1=-\alpha+\mathrm{j}\beta$，$\lambda_2=-\alpha-\mathrm{j}\beta$

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s-\lambda)^2\,(s-\lambda^*)^2}=\frac{k_{12}}{(s-\lambda)^2}+\frac{k_{11}}{s-\lambda}+\frac{k_{21}}{(s-\lambda^*)^2}+\frac{k_{21}}{s-\lambda^*}$$

$$=\frac{k_{12}}{(s+\alpha-\mathrm{j}\beta)^2}+\frac{k_{11}}{x+\alpha-\mathrm{j}\beta}+\frac{k_{21}}{(x+\alpha+\mathrm{j}\beta)}+\frac{k_{21}}{x+\alpha+\mathrm{j}\beta}$$

推导可知：$k_{11}=k_{21}^*$，$k_{22}=k_{12}^*$

设 $k_{11}=|k_{11}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$，则 $k_{21}=|k_{11}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_1}$

$k_{12}=|k_{12}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$，则 $k_{22}=|k_{12}|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_2}$

$$f(t)=|k_{11}|[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}\mathrm{e}^{-(\alpha-\mathrm{j}\beta)t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_1}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)t}]u(t)+|k_{12}|t[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\mathrm{e}^{-(\alpha-\mathrm{j}\beta)t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_2}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)t}]u(t)$$

$$=2|k_{11}|\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t+\varphi_1)u(t)+2|k_{12}|t\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t+\varphi_2)u(t)$$

例 1-35 求 $F(s)=\dfrac{-2(s^2+2s+9)}{[(s-1)^2+4]^2}$的部分分式展开式。

解 $F(s)=\dfrac{-2(s^2+2s+9)}{[(s-1)^2+4]^2}=\dfrac{-2(s^2+2s+9)}{(s-1-2\mathrm{j})^2\,(s-1+2\mathrm{j})^2}$

$$=\frac{k_{12}}{(s-1-2\mathrm{j})^2}+\frac{k_{11}}{s-1-2\mathrm{j}}+\frac{k_{22}}{(s-1+2\mathrm{j})^2}+\frac{k_{21}}{(s-1+2\mathrm{j})^2}$$

$$k_{12}=F(s)\cdot(s-1-2\mathrm{j})^2\big|_{s=1+2\mathrm{j}}=1+\mathrm{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

$$k_{11}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[F(s)\cdot(s-1-2\mathrm{j})^2]\big|_{s=1+2\mathrm{j}}=\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$k_{22}=F(s)\cdot(s-1+2\mathrm{j})^2\big|_{s=1-2\mathrm{j}}=1-\mathrm{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

$$k_{21}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[F(s)\cdot(s-1+2\mathrm{j})^2]\big|_{s=1-2\mathrm{j}}=-\mathrm{j}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$F(s)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{(s-1-2j)^2}+\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{s-1-2j}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{(s-1+2j)^2}+\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{(s-1+2j)^2}$$

所以 $f(t)=2e^t\cos(2t+\frac{\pi}{2})u(t)+\sqrt{2}te^t\cos(2t+\frac{\pi}{4})u(t)$

1.4 连续信号的相关分析

在信号分析中，有时需要两个以上信号的相互关系研究，例如，在通信系统、雷达系统、甚至控制系统中，发送端发出的信号波形是已知的，在接收端信号中，我们必须判断是否存在由发送端发出的信号。困难在于接收端信号中即使包含了发送端发出的信号，也往往因各种原因产生了畸变。一个很自然的想法是用已知的发送波形去与畸变了的接收波形相比较，利用它们的相似或相依性做出判断，这就需要首先解决信号之间的相似或相依性的度量问题，这正是相关分析要解决的问题。

1. 相关函数

如果 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 是能量有限信号且为实函数，则它们之间的相关函数的可定义为

$$R_{12}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau+t)f_2(\tau)d\tau \tag{1-100}$$

$$R_{21}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau-t)f_2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t+\tau)d\tau \tag{1-101}$$

显然，相关函数 $R(t)$ 是两个函数时间时差的函数，且上面两个式中的下标不能互换，一般而言 $R_{12}(t)\neq R_{21}(t)$。但不难证明

$$R_{12}(t)=R_{21}(-t) \tag{1-102}$$

若 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 是同一信号，即 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$，此时相关函数无须加下标，用 $R(t)$ 表示，称为自相关函数。

$$R(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)f(\tau-t)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau+t)f(\tau)d\tau \tag{1-103}$$

与自相关函数相对应，一般两个信号之间的相关函数也成为互相关函数。显然，对自相关函数有如下性质

$$R(t)=R(-t) \tag{1-104}$$

可见，实自相关函数是时移 t 的偶函数。

以上实信号的相关函数的概念可推广到复信号，推广如下：

$$R_{12}(t)=R_{21}^{*}(-t)$$
$$R(t)=R^{*}(-t)$$

当时移 $t=0$ 时，自相关函数有 $R(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(\tau)d\tau$，这正好等于信号本身的能量，也是自相关函数的最大值。

2. 相关与卷积的关系

函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积表达式为

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$f_1(t)$与$f_2(t)$互相关函数的表达式为

$$R_{12}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(\tau-t)\mathrm{d}\tau$$

两式相比较可以得到

$$R_{12}(t)=f_1(t)*f_2(-t) \tag{1-105}$$

可见，将$f_2(t)$反转后与$f_1(t)$卷积积分，即得到$f_1(t)$与$f_2(t)$的互相关函数$R_{12}(t)$。

3. 相关定理

在前面已经讨论了傅里叶变换的12个性质，在这里，介绍第13个性质——相关定理。

若$f_1(t)\leftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$，$f_2(t)\leftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$，则

$$F[R_{12}(t)]=F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2^*(\mathrm{j}\omega)$$

证明　由相关函数与卷积的关系可知

$$R_{12}(t)=f_1(t)*f_2(-t)$$

所以，利用傅里叶变换时域卷积的性质可得到

$$F[R_{12}(t)]=F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(-\mathrm{j}\omega)=F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2^*(\mathrm{j}\omega) \tag{1-106}$$

可见，两个信号的互相关函数的傅里叶变换等于其中第一个信号的变换与第二个信号的变换取共轭后二者的乘积，这就是相关定理。

同理可得到

$$F[R_{21}(t)]=F_1^*(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega) \tag{1-107}$$

若$f_1(t)$与$f_2(t)$是同一信号，即$f_1(t)=f_2(t)=f(t)$，且$f(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$，则自相关函数为

$$F[R(t)]=|F(\mathrm{j}\omega)|^2 \tag{1-108}$$

而$|F(\mathrm{j}\omega)|^2$正好是能量信号$f(t)$的能量谱，所以相关定理为信号能量谱的求法提供了一种简单的方法。

1.5　基于MATLAB语言的连续信号分析

1.5.1　MATLAB在信号的时域分析中的应用

MATLAB不仅有强大的计算功能，而且还有很强的绘图功能，最适用于信号的产生及各种运算。绘制波形图常见的基本函数如下。

1. 门函数rectpuls调用格式

y=rectpuls(t)　产生高度为1，宽度为1的门函数。

y=rectpuls(t，w)　产生高度为1，宽度为w的门函数。

2. 三角脉冲函数tripuls的调用格式

y=tripuls(t)　产生高度为1，宽度为1的三角脉冲函数。

y=tripuls(t，w)　产生高度为1，宽度为w的三角脉冲函数。

y=tripuls(t，w，s)　产生高度为1，宽度为w的三角脉冲函数，$-1<s<1$；当s=0时为对称三角形；当s=−1时，为三角形顶点在左边。

3. 抽样函数 sinc(t)

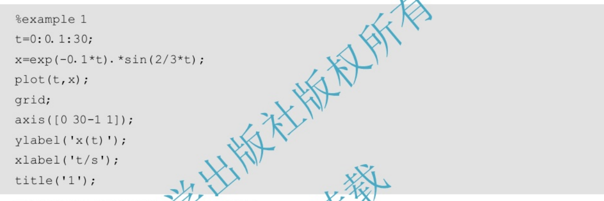
sinc(t)=sin(pi * t)/pi * t

4. 周期方波 square 调用格式

y=square(w0 * t)产生基频为w0的周期方波，占空比为50%。

例1-36　已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-0.1t}\sin\frac{2}{3}t$，试用MATLAB软件，绘出 $x(t)$ 关于 t 的波形。

解　假设 t 的范围是在0～30s内，并以0.1s递增，其MATLAB程序如下：



```
%example 1
t=0:0.1:30;
x=exp(-0.1*t).*sin(2/3*t);
plot(t,x);
grid;
axis([0 30-1 1]);
ylabel('x(t)');
xlabel('t/s');
title('1');
```

程序运行后显示图形如图1.41所示。

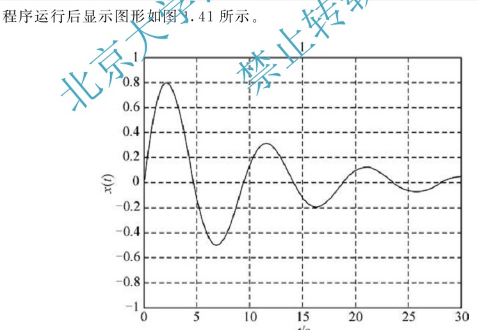


图1.41　例1-35程序运行后图形

例1-37　已知信号 $f_1(t)=\cos(\pi t)$，$f_2(t)=0.5\cos(20\pi t)$，画出叠加信号 $f_1(t)+f_1(t)$、双极性调制信号 $f_1(t)f_1(t)$、单极性调制信号 $[2+f_1(t)]f_1(t)$ 的波形，并画出包络线。

解　其MATLAB程序如下：

```
%example 2
t=linspace(-2,2,500);
f1=cos(pi*t);
f2=0.5*cos(20*pi*t);
f=f1+f2;
fs=f1.*f2;
fc=(2+f1).*f2;
subplot(3,1,1);
plot(t,f,t,f1+0.5,'r:',t,f1-0.5,'r:');
ylabel('f1(t)+f2(t)');
title('叠加信号');
subplot(3,1,2);
plot(t,fs,t,f1/2,'r:',t,- f1/2,'r:');
ylabel('f1(t)* f2(t)');
title('双极性调制信号');
subplot(3,1,3);
plot(t,fc,t,(f1+2)/2,'r:',t,-(f1+2)/2,'r:');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('2+f1(t))* f2(t)');
title('单极性调制信号')
```

程序运行后显示图形如图1.42所示。

图1.42　例1-37程序运行后图形

1.5.2 MATLAB 在信号的频域分析中的应用

节书主要介绍 MATLAB 绘制周期信号的离散频谱和非周期信号的连续频谱。

例 1-38 设周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的脉冲幅度为 E，宽度为 τ 的周期矩形脉冲 $f(t)$，其周期为 T，如图 1.43 所示。画出其频谱。

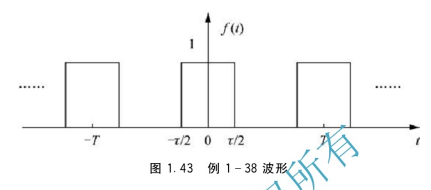


图 1.43 例 1-38 波形

解 将 $f(t)$ 展开为傅里叶级数的指数形式，可求得傅里叶复系数为

$$F_n=\frac{E}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t=\frac{E}{T}\cdot\left.\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}}{-\mathrm{j}n\Omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$=\frac{2E}{T}\cdot\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{n\Omega}=\frac{E\tau}{T}\cdot\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$$

$$=\frac{E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

式中：$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$为基波频率。

所以 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}=\dfrac{E\tau}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{n\Omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$

其 MATLAB 程序如下：

```
%example 3
E=1;tao=0.1;T=0.5;
n0=T/tao;
n=-2*n0:2*n0;
fn=E*tao/T*(sin(n*pi*tao/T+eps*(n==0)))./(n*pi*tao/T+eps*(n==0));
fn_abs=abs(fn);
fn_ang=angle(fn);
fn_mabs=fliplr(fn_abs(2:11));
fn_mang=-fliplr(fn_ang(2:11));
fnabs=[fn_mabs,fn_abs];
fnang=[fn_mang,fn_ang];
subplot(2,1,1);
stem((-2*n0:2* n0),fn_abs);grid;
text(4,0.11,'幅度谱');
```



```
subplot(2,1,2);
stem((-2* n0:2* n0),fn_ang);
text(-2,2,'相位谱');
xlabel('n');
grid
```

程序运行后显示图形如图 1.44 所示。

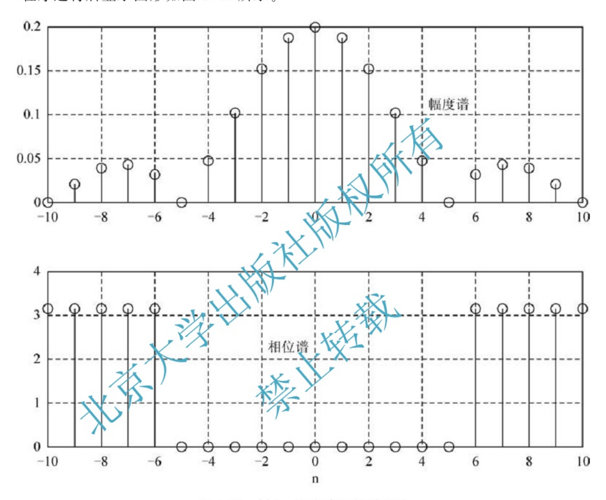


图 1.44 例 1-38 程序运行后图形

例 1-39 利用 MATLAB 绘制单边指数信号 $f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$，$a>0$ 的频谱图。

解 其傅里叶变换为

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$$

幅度谱为

$$|F(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

相位谱为

$$\varphi(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{a}$$

取 $a=10$，则其 MATLAB 程序如下：

```
%example 4
w=-100:0.2:100;
a=10;
F=1./(a+j*w);
clf;
subplot(2,1,1),plot(w,abs(F));grid;
xlabel('f/(rad/s)');
ylabel('幅度谱');
subplot(2,1,2),plot(w,angle(F)* 180/pi);grid;
xlabel('f/(rad/s)');
ylabel('相位谱');
```

程序运行后显示图形如图 1.45 所示。

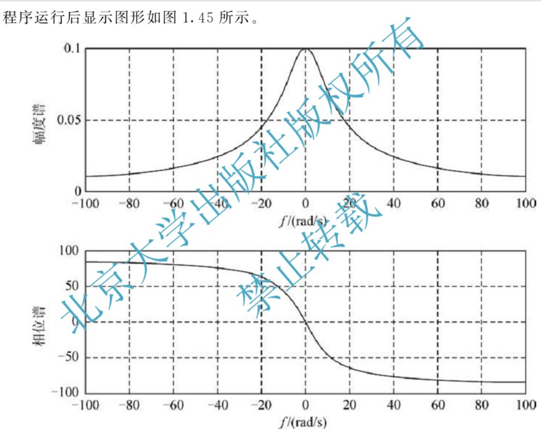


图 1.45 例 1-39 程序运行后图形

1.5.3 MATLAB 在信号的 s 域分析中的应用

对于较复杂的 $F(s)$，手工进行部分分式展开进行拉普拉斯变换将比较困难，可以借助 MATLAB 的函数 residue 来进行辅助计算。函数 residue 的调用格式为

```
[R,P,H]=residue(num,den)
```

其中，P 为 $F(s)$的极点，R 为 $F(s)$各极点对应的留数，H 为 $F(s)$除真分式后有理多项式的系数，num、den 分别为 $F(s)$的分子分母系数向量。





例 1-40 利用 MATLAB 求 $F(s)=\dfrac{3s^3+s^2+6s-25}{s^2+2s+5}$ 的拉普拉斯反变换。

解 其 MATLAB 程序如下：

```
%example 5
num=[3 1 6-25];
den=[1 2 5];
[R,P,H]=residue(num,den)
```

结果显示：

```
R=                        P=                      H=
0.5000+0.2500i            -1.0000+2.0000i         3      - 5
0.5000-0.2500i            - 1.0000-2.0000i
```

得到展开式为

$$F(s)=3s-5+\frac{0.5+0.25\mathrm{j}}{s+1-2\mathrm{j}}+\frac{0.5-0.25\mathrm{j}}{s+1+2\mathrm{j}}$$

MATLAB 也可处理多重极点的情况。

例 1-41 利用 MATLAB 求 $F(s)=\dfrac{5s-1}{s^3-3s-2}$ 的拉普拉斯反变换。

解 其 MATLAB 程序如下：

```
%example 6
num=[5-1];
den=[1 0-3-2];
[R,P,H]=residue(num,den)
```



结果显示：

```
R=                  P=                  H=
1.0000              2.0000              []
-1.0000             -1.0000
2.0000              -1.0000
```

得到展开式为

$$F(s)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^2}$$

本 章 小 结

1. 连续信号的时域分析

1）连续信号的时域描述

包含了指数函数、正弦函数、符号函数、复指数函数表达式、波形及特性，阶跃函数、冲激函数、冲激偶函数、取样函数的定义、表达式、波形及性质。

2）连续时间信号的基本运算

包含了信号的相加、相乘、数乘、微分、积分运算等时域运算，翻转、平移、尺度变

换等时域变换，卷积的定义、图解机理、性质及常见信号的卷积。

3）信号的分解

利用卷积实现信号的分解。

2. 连续信号的频域分析

1）周期信号的分解

包含了周期信号展开成三角傅里叶级数的展开式、系数表达式及讨论了函数奇偶性对系数的影响，指数傅里叶级数的展开式、系数表达式，周期信号频谱特点。

2）非周期信号的分解

包含了非周期信号的傅里叶变换对、物理意义、常见信号的傅里叶变换、傅里叶变换的性质。

3. 连续信号的复频域分析

拉普拉斯变换对、收敛域、常见信号的拉普拉斯变换、拉普拉斯变换的性质及用部分分式展开法求拉普拉斯逆变换。

4. 连续信号的相关分析

包含了互相关函数的定义、性质，自相关函数的定义、性质，与卷积的关系及相关定理。

5. 基于MATLAB语言的连续信号分析

MATLAB在连续信号时域、频域、复频域中的应用及典型例题解析。



拉普拉斯变换和傅里叶变换之间的关系

我们在引出拉普拉斯变换时，是针对 $f(t)$ 不满足绝对可积条件，对其乘以一个衰减因子 $e^{-\sigma t}$ 进行傅里叶变换，这样就演变为拉普拉斯变换：

$$L[f(t)]=F[f(t)e^{-\sigma t}]=F(s)\big|_{s=\sigma+j\omega}$$

所以，对于单边拉普拉斯变换有如下关系。

1. $\sigma>0$

如果 $f(t)$ 的象函数 $F(s)$ 其收敛边界位于 s 平面右半平面(虚轴以右)，则在 $s=j\omega$ 处 $F(s)$ 不收敛。在这种情况下，函数 $f(t)$ 的傅里叶变换不存在。例如，函数 $f(t)=e^{at}u(t)(a>0)$，其收敛域 $\sigma>a$，拉普拉斯变换 $F(s)=\dfrac{1}{s-a}$，而傅里叶变换不存在。

2. $\sigma<0$

如果 $f(t)$ 的象函数 $F(s)$ 其收敛边界位于 s 平面左半平面(虚轴以左)，这种情况下，$F(s)$ 在 $s=j\omega$ 处收敛。函数 $f(t)$ 的傅里叶变换存在，此时只需要令 $F(s)$ 表达式中的 $s=j\omega$ 就得到相应的傅里叶变换。例如，函数 $f(t)=e^{-at}u(t)(a>0)$，其收敛域 $\sigma>-a$，拉普拉斯变换 $F(s)=\dfrac{1}{s+a}$，傅里叶变换 $F(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+a}$。

3. $\sigma=0$

如果 $f(t)$ 的象函数 $F(s)$ 其收敛边界位于 s 平面虚轴，此时 $F(s)$ 和 $F(j\omega)$ 之间不再是简单的置换关系，$F(j\omega)$ 中会包含奇异函数项。例如，函数 $f(t)=u(t)$，其收敛域 $\sigma>0$，拉普拉斯变换 $F(s)=\frac{1}{s}$，傅里叶变换 $F(j\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$。

若 $f(t)$ 的象函数 $F(s)$ 的收敛坐标 $\sigma=0$，那么 $F(s)$ 在虚轴上必然有极点，即 $F(s)$ 分母为 0 必有虚根。现根据虚根为单根还是重根做如下讨论。

1) 虚根全为单根

设 $F(s)$ 有 N 个虚根 $j\omega_1$，$j\omega_2$，…，$j\omega_N$，将 $F(s)$ 部分分式展开，并分为两部分，其中极点在左半平面的部分分为 $F_a(s)$，这样就有

$$F(s)=F_a(s)+\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{s-j\omega_i}$$

令 $L^{-1}[F_a(s)]=f_a(t)$，则上式逆变换为

$$f(t)=f_a(t)+\sum_{i=1}^{N}K_i e^{j\omega_i t}u(t)$$

现求 $f(t)$ 的傅里叶变换，对于第一项 $F_a(s)$，由于所有的极点在左半平面，因此在虚轴收敛，故有

$$F[f_a(t)]=F_a(s)\mid_{s=j\omega}$$

而 $e^{j\omega_i t}u(t)$ 的傅里叶变换为 $\pi\delta(\omega-\omega_i)+\frac{1}{j(\omega-\omega_i)}$，所以第二项的傅里叶变换为

$$\sum_{i=1}^{N}K_i\left[\pi\delta(\omega-\omega_i)+\frac{1}{j(\omega-\omega_i)}\right]$$

于是有

$$F[f(t)]=F_a(s)\mid_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{N}K_i\left[\pi\delta(\omega-\omega_i)+\frac{1}{j(\omega-\omega_i)}\right]=F_a(s)\mid_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{j\omega-j\omega_i}+\sum_{i=1}^{N}K_i\pi\delta(\omega-\omega_i)$$

由于前两项之和正好为 $F(s)\mid_{s=j\omega}$，所以得到 $f(t)$ 的傅里叶变换为

$$F[f(t)]=F(s)\mid_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{N}K_i\pi\delta(\omega-\omega_i)$$

2) 虚根有重根

处理方法与单根相似。设 $F(s)$ 在 $s=j\omega_1$ 有 r 重根，而其余极点位于左半平面，则 $F(s)$ 相应的傅里叶变换为

$$F[f(t)]=F(s)\mid_{s=j\omega}+\frac{K_{11}(j)^{r-1}\pi}{(r-1)!}\delta^{(r-1)}(\omega-\omega_1)+\frac{K_{12}(j)^{r-2}\pi}{(r-2)!}\delta^{(r-2)}(\omega-\omega_1)+\cdots+K_{1r}\pi\delta(\omega-\omega_1)$$

习 题

1-1 粗略绘出下列各函数的波形。

(1) $u(t+1)-2u(t-1)+u(t-3)$

(2) $(t+1)u(t-1)-tu(t)-u(t-2)$

(3) $e^{|t|}$

(4) $e^{-t}\cos 10\pi t[u(t-1)-u(t-2)]$

(5) $\frac{\sin 2(t-1)}{(t-1)}$

(6) $\cos t+\cos 30t$

1-2　试写出图1.46所示各信号的表达式。

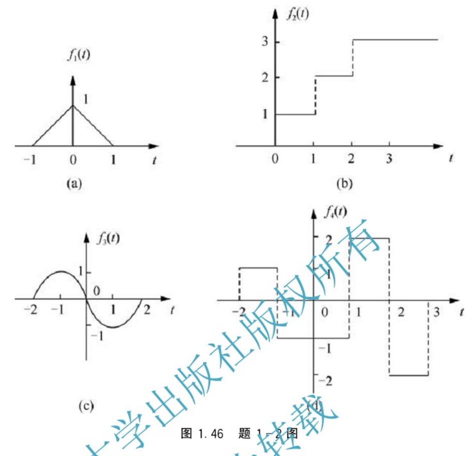


图1.46　题1-2图

1-3　信号 $x(t)$ 的波形如图1.47所示，试绘出下列函数的波形。

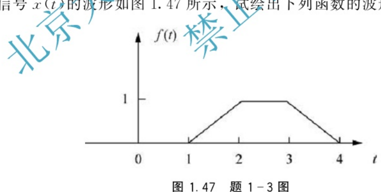


图1.47　题1-3图

(1) $x(t-2)$　　(2) $x(t+1)u(t+1)$

(3) $x(-t-2)$　　(4) $x(-t-2)u(-t-2)$

(5) $x(3-2t)$　　(6) $x(-1-\frac{1}{2}t)$

1-4　计算下列各题。

(1) $\frac{d}{dt}[e^{-t}\sin t u(t)]$　　(2) $\frac{d}{dt}[(1-t)e^{-2t}\delta(t)]$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi t)}{t}\delta(t)dt$　　(4) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2t}[\delta'(t)+\delta(t)]dt$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}[t^2+\sin(\pi t/4)]\delta(t+2)\mathrm{d}t$　　(6) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+2)\delta(t/2)\mathrm{d}t$

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+2t^2-2t+1)\delta'(t-1)\mathrm{d}t$　　(8) $\int_{-\infty}^{t}(1-x)\delta'(x)\mathrm{d}x$

1-5　求下列各函数的卷积结果。

(1) $u(t+1)\cdot u(t-5)$　　(2) $u(t)\cdot \mathrm{e}^{-2t}u(t)$

(3) $\sin tu(t)\cdot[\delta(t+1)-\delta(t-1)]$　　(4) $2\cdot u(t-5)$

1-6　试将图 1.48 所示周期信号展成三角形式和指数形式的傅里叶级数，并画出频谱图。

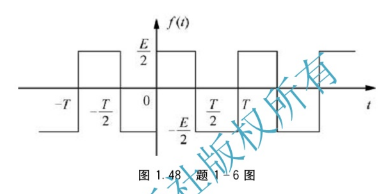


图 1.48　题 1-6 图

1-7　试求下列信号的傅里叶变换。

(1) $x(t)=2[u(t+1)-u(t-5)]$　　(2) $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$

(3) $x(t)=\mathrm{e}^{|t|}$　　(4) $x(t)=t\mathrm{e}^{-2t}u(t)$

(5) $x(t)=\mathrm{Sa}(t)$　　(6) $x(t)=\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\sin\omega_0 tu(t)$

1-8　已知连续时间信号 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{a+\mathrm{j}\omega}$（$a$ 为常数），求下列信号的傅里叶变换。

(1) $tx(t)$　　(2) $x(3t-2)$

(3) $x(t)\cos(2t)$　　(4) $x^2(t)$

(5) $x(t)*x(t)$　　(6) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)*\dfrac{1}{\pi t}$

1-9　设周期信号如图 1.49 所示，求该周期信号的傅里叶变换。

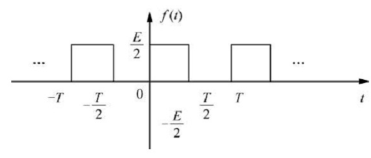


图 1.49　题 1-9 图

1-10　试求下列函数的傅里叶反变换。

(1) $X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{(1+\mathrm{j}\omega)(2+\mathrm{j}\omega)}$ (2) $X(\mathrm{j}\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$

(3) $X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\omega_0}{\pi}[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)]$ (4) $X(\mathrm{j}\omega)=k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}[u(\omega+\omega_0)-u(\omega-\omega_0)]$

(5) $X(\mathrm{j}\omega)=10\mathrm{Sa}(5\omega)$ (6) $X(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega}{8}\right)$

1-11 求下列信号的拉普拉斯变换。

(1) $x(t)=2[u(t+1)-u(t-5)]$ (2) $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$

(3) $x(t)=\delta(t-2)$ (4) $x(t)=\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t)$

(5) $x(t)=t\mathrm{e}^{-2(t-1)}u(t-1)$ (6) $x(t)=3\sin t+2\cos t$

1-12 已知信号的拉普拉斯变换如下，求原函数的初值和终值。

(1) $X(s)=\dfrac{s-6}{(s+2)(s+5)}$ (2) $X(s)=\dfrac{10(s+2)}{2(s+5)}$

(3) $X(s)=\dfrac{1}{(s+2)^3}$ (4) $X(s)=\dfrac{s+5}{(s+2)^2(s+3)}$

1-13 求下列信号的拉普拉斯反变换。

(1) $\dfrac{s-6}{(s+2)(s+5)}$ (2) $\dfrac{s+1}{s^2-1}$

(3) $\dfrac{s^3+6s^2+6s}{s^2+6s+8}$ (4) $\dfrac{s+2}{s^2+2s+5}$

(5) $\dfrac{6s^2+22s+18}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ (6) $\dfrac{6}{(s+1)(s^2+1)}$

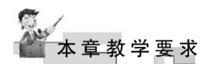
(7) $\dfrac{2s+30}{s^2+10s+50}$ (8) $\dfrac{4}{s^2\ (s+1)^3}$

(9) $\dfrac{18\mathrm{e}^{-s}+1}{(s+3)(s+6)(s-3)}$ (10) $\dfrac{\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s}+3}{s(s+1)(s^2+2s+5)}$

(11) $\dfrac{4}{s(1+\mathrm{e}^{-2s})}$ (12) $\dfrac{\pi(1+\mathrm{e}^{-s})}{(s^2+\pi^2)(1-\mathrm{e}^{-2s})}$

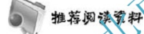
第2章

连续时间系统的分析



本章教学要求

- 会建立连续时间系统的数学模型，熟悉连续时间系统框图的基本单元，学会利用卷积法求解系统的零状态响应。
- 深刻理解和掌握系统频谱函数的定义、物理意义、求法和应用。
- 会求解非周期信号激励下系统的零状态响应。
- 深刻理解理想低通滤波器的定义和传输特性。
- 了解信号无失真传输条件。
- 深刻理解抽样信号频谱及求解；理解和掌握抽样定理。
- 能根据系统的时域模型画出系统的s域模型，并求解LTI系统的三大响应。
- 深刻理解系统函数的定义，会用多种方法求解系统函数；能根据系统函数的零极点分布分析、判别系统的时域特性和频域特性。
- 理解连续时间系统的MATLAB实现及典型例题的解析。



推荐阅读资料

[1] 刘品潇，马世榜，李建朝．信号与系统[M]．长沙：国防科技大学出版社，2008.
[2] 汤全武，陈晓娟，李德敏．信号与系统[M]．武汉：华中科技大学出版社，2008.
[3] 闫青，付晨．信号与系统[M]．济南：山东科学技术出版社，2008.

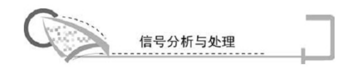


引例：地下漏水检测仪

通过系统对信号的分析，可以方便人们利用、分析和处理问题。不同的功能有不同的系统来实现，如检测地下是否漏水的就有地下漏水检测仪，如图2.1所示。当地下管道漏水时，会产生噪声并能沿埋层介质传播到地面或沿管道传播，这样检漏仪能沿管线或在路面上方就确定漏点的位置。



图2.1　漏水检测现场示意图和地下漏水检测仪



系统的分析方法就是给定激励，根据描述系统响应与激励之间关系的微分方程求解系统响应的方法。如果分析是在时间域进行的，则称为时域分析；如果分析是在频域进行的，则称为频域分析；如果分析是在复频域进行的，则称为复频域分析。

2.1 连续时间系统的时域分析

2.1.1 连续时间系统的数学模型

要分析一个实际系统，首先要建立该系统的数学模型，并在数学模型的基础上，运用数学方法求出它的解答，最后又回到实际系统，对所得结果给出物理解释、赋予物理意义。所谓系统模型就是指系统的特定功能或特性的一种数学抽象和数学描述。更具体地说，就是用某种数学表达式或用具有理想特性的符号组合成图形，以描述系统的特定功能或特性。图 2.2 所示系统是由电阻、电感串联构成。若激励信号是电压源，系统响应为回路电流，则根据元件的伏安特性与基尔霍夫电压定律(KVL)可建立如下的微分方程：

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+Ri(t)=f(t)$$

这就是该系统的数学模型。

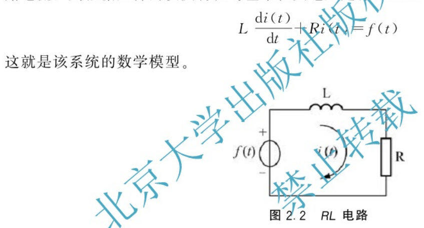


图 2.2 *RL* 电路

如何建立数学模型呢？一般而言是根据它们所具有的 KCL、KVL、VCR 特性来写出相应的数学表达式，现举例如下。

例 2-1 如图 2.3 所示电路图，求 $u_c(t)$和 $i_s(t)$的关系。

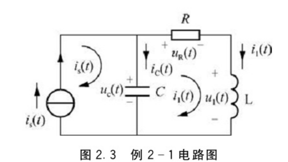


图 2.3 例 2-1 电路图

解 对其中一个独立节点利用 KCL 有 $i_S(t)=i_L(t)+i_C(t)$

对电容利用 VCR 有 $$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$



对右边回路利用 KVL、VCR 有　　$u_C(t)=u_L(t)+u_R(t)=i_L(t)\cdot R+L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$

由图可知有　　$i_1(t)=\dfrac{u_c(t)-u_1(t)}{R}=i_s(t)-i_c(t)$

所以　$u_c(t)=R[i_s(t)-i_c(t)]+L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[i_s(t)-i_c(t)]$

$\qquad=Ri_s(t)-RCu_c'(t)+Li_s'(t)-LCu_c''(t)$

整理得到

$$u_c''(t)+\frac{R}{L}u_c'(t)+\frac{1}{LC}u_c(t)=\frac{1}{C}i_s'(t)+\frac{R}{LC}i_s(t)$$

这是一个二阶线性微分方程，也就是例 2－1 所示系统的数学模型。一般规定微分方程的阶数就是系统的阶数。所以例 2－1 所示系统是一个二阶系统。对于较复杂的高阶系统，其数学模型就是一个高阶微分方程。

例 2－1 所示系统的构成元件全是参数恒定的线性元件，这样的系统被称为线性时不变系统，特点是方程是一个线性常系数微分方程。

一般而言，对于一个线性时不变系统，如激励信号为 $f(t)$，系统的响应为 $y(t)$，则描述线性时不变系统激励与响应之间关系的是 n 阶常系数线性微分方程，它们的通式一般为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}y(t)+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}y(t)+a_{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}t^{n-2}}y(t)+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+a_0y(t)\\&=b_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}f(t)+a_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}f(t)+b_{m-2}\frac{\mathrm{d}^{m-2}}{\mathrm{d}t^{m-2}}f(t)+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)+b_0f(t)\end{aligned}\tag{2-1}$$

简写为　　$\sum\limits_{i=0}^{n}a_iy^{(i)}(t)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jf^{(j)}(t)$ 其中 $a_n=1$

式中：等号两边的系数是与系统的结构和参数有关的常系数。

2.1.2　连续时间系统的框图

除了利用数学表达式描述系统模型外，也可以借助方框图表示系统模型。每个方框图反映了某种数学运算，描述了其输入与输出信号的关系，若干个方框图组成一个完整的系统。图 2.4 是连续系统基本单元方框图。利用这些基本方框图单元即可组成一个完整的系统。

(a) 加法器　　(b) 积分器　　(c) 乘法器

图 2.4　连续系统基本单元方框图

对于连续 LTI 系统的框图，都是由图 2.4 这 3 种基本单元组成的。只要给出了连续系

统的框图，就可以利用各个单元输入与输出之间的关系求出系统的响应。

例 2－2 如图 2.5 所示系统，求系统输入与输出之间的关系。

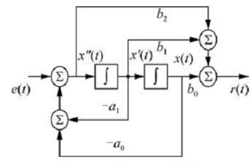


图 2.5 例 2－2 系统图

解 对于图 2.5 所示系统，可以得到 $x''(t)$ 为

$$x''(t)=e(t)-a_1x'(t)-a_0x(t)$$

而输出 $r(t)$ 为

$$r(t)=b_2x''(t)+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

整理消去中间变量 $x(t)$，得到输出 $r(t)$ 和输入 $e(t)$ 之间的关系为

$$r''(t)+a_1r'(t)+a_0r(t)=b_2e''(t)+b_1e'(t)+b_0e(t)$$

2.1.3 连续时间系统的时域分析

微分方程的时域分析有经典法、卷积法。对于经典法相信大家在高数中已经熟悉，本书不讲。本书只讲解卷积法。由于系统的解(响应)分为零输入响应和零状态响应，而零输入响应的求法与经典法求齐次解一样，因此下面主要讲解如何用卷积积分求解系统的零状态响应。

线性时不变系统的单位冲激响应是指系统在激励为单位冲激函数 $\delta(t)$ 作用下所产生的零状态响应，简称冲激响应，用 $h(t)$ 表示。由微分方程求解冲激响应的时域解法比较复杂，这里不作介绍，后面将会讲解冲激响应的变换域解法。

由于任意信号可以用冲激函数的线性组合表示，即

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

如将它作用于已知冲激响应为 $h(t)$ 的系统，则系统的零状态响应为

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t) \tag{2-2}$$

式(2－2)表明，对于一个线性时不变系统，如已知冲激响应 $h(t)$，则任意激励 $f(t)$ 下系统的响应都为 $f(t)$ 和 $h(t)$ 的卷积。不同系统具有不同的 $h(t)$，因此 $h(t)$ 常被用来表征一个线性时不变系统，可用图 2.6 所示的框图来表示。

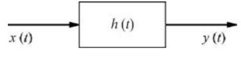


图 2.6 线性时不变系统框图



若两个系统级联在一起，则根据卷积的结合律，整个系统就相当于一个冲激响应为$h_1(t)*h_2(t)$的系统，如图2.7所示；如两个系统并联在一起，则根据卷积的分配律，整个系统就相当于一个冲激响应为$h_1(t)+h_2(t)$的系统，如图2.8所示。

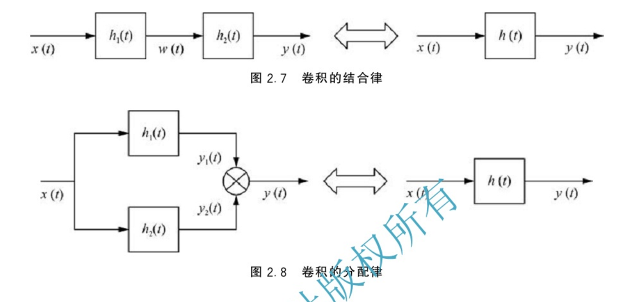


图2.7　卷积的结合律

图2.8　卷积的分配律

2.2　连续时间系统的频域分析

系统的频域分析就是以信号的频域分析为基础，在频域中求解信号作用于线性系统的响应以及分析相关的问题。频域分析方法的基本思想是设法将信号分解为一组基本信号单元的加权或加权积分，进而利用连续时间系统的线性和时不变解决系统分析的问题。在频域分析方法中利用虚指数信号作为分解信号的基本单元，而信号的表示就是傅里叶级数和傅里叶变换。

2.2.1　电路的频域模型

一个电路系统通常是由电阻、电容和电感3种基本电路元件构成，下面先探讨这3种基本电路元件上的电压和电流的频谱关系。

如图2.9所示，对于电阻R、电容C以及电感L上的时域关系有(关联参考方向)

$$u_R(t)=R\cdot i_R(t)$$

$$u_L(t)=L\cdot\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

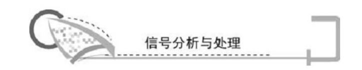
$$i_c(t)=C\cdot\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}$$

对上面三式两边同时进行傅里叶变换，得到

$$U_R(\mathrm{j}\omega)=R\cdot I_R(\mathrm{j}\omega)$$

$$U_L(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\omega L\cdot I_L(\mathrm{j}\omega)$$

$$U_C(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\cdot I_C(\mathrm{j}\omega)$$



因此，电阻 R、电容 C 以及电感 L 对应的复阻抗分别表示为 R、$\mathrm{j}\omega L$、$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$，电阻 R、电容 C 以及电感 L 对应的频域模型如图 2.9 所示。对于具体的电路，利用电阻 R、电容 C 以及电感 L 上的电压、电流的频谱及它们的复阻抗来代替电压、电流以及各元件本身即可得到电路的频域模型，然后就可按照熟悉的电路分析理论进行电路的频域分析。

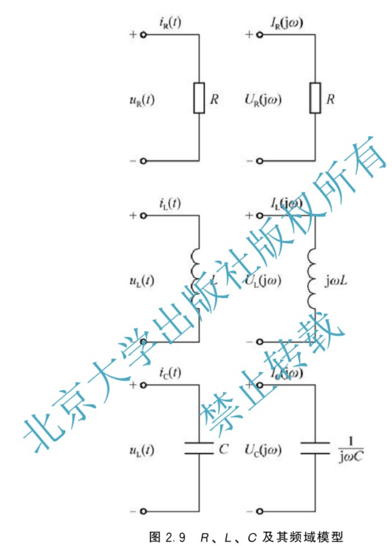


图 2.9　R、L、C 及其频域模型

例 2－3　如图 2.10(a)所示系统，求当激励为阶跃信号时的零状态响应。

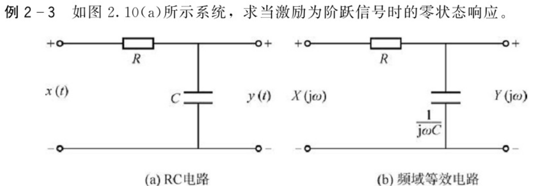


图 2.10　例 2－3 电路





解 此系统的频域等效电路如图 2.10(b)所示。

由于 $X(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{FT}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$

且该电路的微分方程为 $RC\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_c(t)+u_c(t)=u(t)$

可得到系统的频谱函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

所以系统零状态响应的频谱函数为

$$\begin{aligned}Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)&=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\cdot\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}\\&=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}-\frac{RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}\end{aligned}$$

所以求得系统零状态响应为

$$y_{zs}(t)=u(t)-\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}u(t)$$

2.2.2 基本信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 激励下的零状态响应

1. 公式

$$y_{zs}(t)=H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\tag{2-3}$$

2. 公式推导

由前面的讲解可知：$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}*h(t)$

按卷积展开有 $y_{zs}(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}H(\mathrm{j}\omega)$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

$$\therefore y_{zs}(t)=H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

上式就是频域分析的基础，在这里 $H(\mathrm{j}\omega)$称为系统的频谱函数。该式表明，当一个复指数信号作用于系统时，其输出的零状态响应仍是同频率的复指数信号，不同的是响应比激励多乘一个与时间无关的系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$，即响应的幅度是激励的加权，响应的相位是激励相位与系统函数相位之和。可见，这种系统对激励的改变作用是由系统函数来反映的。

3. 系统频谱函数 $H(\mathrm{j}\omega)$的求法

(1) 求出 $h(t)$，再利用 $H(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau$ 求取 $H(\mathrm{j}\omega)$。

(2) 求出 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$、$F(\mathrm{j}\omega)$，再利用 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)}$求取 $H(\mathrm{j}\omega)$。

(3) 已知微分方程时可利用下式求取 $H(\mathrm{j}\omega)$。

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{b_m(\mathrm{j}\omega)^m+b_{m-1}(\mathrm{j}\omega)^{m-1}+b_{m-2}(\mathrm{j}\omega)^{m-2}+\cdots+b_1(\mathrm{j}\omega)+b_0}{a_n(\mathrm{j}\omega)^n+a_{n-1}(\mathrm{j}\omega)^{n-1}+a_{n-2}(\mathrm{j}\omega)^{n-2}+\cdots+a_1(\mathrm{j}\omega)+a_0}$$

(4) 已知电路图时可先写出微分方程，再利用(3)法求取 $H(\mathrm{j}\omega)$。

4. 系统频谱函数 $H(\mathrm{j}\omega)$的物理意义

$H(\mathrm{j}\omega)$为系统的频谱密度函数，它一般为一个复数，故可表示为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)}=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=H(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \tag{2-4}$$

式中：$H(\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|$为 $H(\mathrm{j}\omega)$的模，称为系统的幅频特性；$\varphi(\omega)$为 $H(\mathrm{j}\omega)$的相位，称为系统的相频特性；二者合起来称为系统的频谱特性。

5. 系统频谱函数 $H(\mathrm{j}\omega)$的应用

当系统的激励为正弦信号 $f(t)=A\sin(\omega_0 t+\phi)$时，根据欧拉公式

$$f(t)=\frac{A}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\theta)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t+\theta)}]$$

得到系统的响应

$$y(t)=\frac{A}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\theta)}H(\mathrm{j}\omega_0)-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t+\theta)}H(-\mathrm{j}\omega_0)]$$

设 $H(\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$，$H(-\mathrm{j}\omega)=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\omega)}$，则有

$$\begin{aligned}y(t)&=A|H(\mathrm{j}\omega_0)|[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\theta+\varphi(\omega_0))}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_0 t+\theta+\varphi(\omega_0))}}{2\mathrm{j}}]\\&=A|H(\mathrm{j}\omega_0)|\sin(\omega_0 t+\theta+\varphi(\omega_0))\end{aligned} \tag{2-5}$$


小提醒：

当输入为正弦信号 $f(t)=A\sin(\omega_0 t+\phi)$时的响应也是正弦信号，并且它的频率和输入信号相同，但是它的幅度增加了比例因子$|H(\mathrm{j}\omega_0)|$，而且相位移动了 $\varphi(\omega_0)$。

2.2.3 一般信号 $f(t)$激励下的零状态响应 $y_{zs}(t)$

由 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$ 可知，$f(t)$可表示为若干个基本信号 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 的线性组合，故可用叠加原理求一般信号 $f(t)$激励下的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

1. 一般信号零状态响应的表达式

$$y_{zs}(t)=F^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)] \tag{2-6}$$

2. 推导

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\rightarrow H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\text{（利用频域分析的基础）}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\text{（利用系统的齐次性）}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\text{（利用系统的叠加性）}$$

$$\therefore f(t)\rightarrow y_{zs}(t)=F^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)]$$

3. 求解步骤

（1）将 $f(t)\rightarrow F(\mathrm{j}\omega)$。

（2）求系统函数 $H(\mathrm{j}\omega)$。

（3）求 $y_{zs}(t)$的傅里叶变换 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)$。

（4）求 $Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)$的傅里叶逆变换 $y_{zs}(t)=F^{-1}[F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)]$。

例 2-4　如果系统的微分方程为$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+6y(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$，且已知 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，试求系统的零状态响应。

解　（1）求得系统的 $F(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$。

（2）求得系统的频谱函数为 $H(\mathrm{j}\omega)=\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2+5(\mathrm{j}\omega)+6}$。

（3）求得系统的傅里叶变换：

$$Y_{zs}(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega}\cdot\frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2+5(\mathrm{j}\omega)+6}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}}{\mathrm{j}\omega+1}+\frac{2}{\mathrm{j}\omega+2}+\frac{-\frac{3}{2}}{\mathrm{j}\omega+3}$$

（4）求得零状态响应为

$$y_{zs}(t)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}u(t)+2\mathrm{e}^{-2t}u(t)-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

2.2.4　信号的无失真传输

一般情况下，系统的响应波形和激励波形不相同，而且信号在传输过程中将产生失真。线性系统的信号失真由两个方面的因素造成，一方面，系统对信号各频率分量幅度产生不同程度的衰减，使响应的各频率分量的相对幅度产生变化，引起幅度失真；另一方面，系统对各频率分量产生的相移与频率不成正比，使响应的各频率分量在时间轴上的相对位置产生变化，引起相位失真。本节将结合实例讨论。

所谓信号的无失真传输是指系统的输出信号与输入信号相比，只有幅度的大小和出现时间的先后不同，而没有波形上的变化。设激励为 $f(t)$，响应为 $y(t)$，则无失真传输的条件为

$$y(t)=kf(t-t_0)\tag{2-7}$$

式中：k 是一个常数；t_0 为滞后时间。

满足此条件时，$f(t)$的波形是 $y(t)$波形经时间 t_0 的滞后波形，虽然幅度方面有系数 k 倍的变化，但波形的形状不变，举例如图 2.11 所示。

对式(2-7)两边同时进行傅里叶变换，有

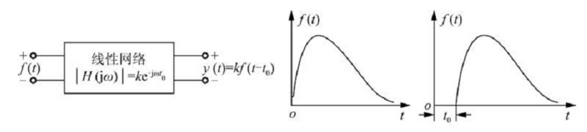


图 2.11　线性网络的无失真传输

$$Y(j\omega)=k\,e^{-j\omega t_0}\cdot F(j\omega)$$

可得到系统的频谱函数

$$H(j\omega)=k\,e^{-j\omega t_0} \tag{2-8}$$

所以，系统频域无失真传输的条件图如图 2.12 所示。

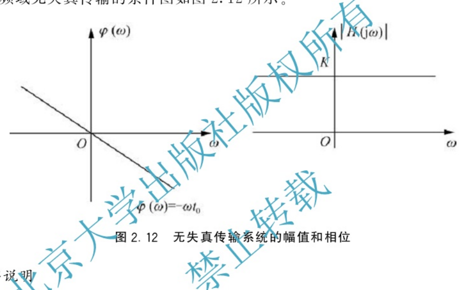


图 2.12　无失真传输系统的幅值和相位

1. 文字说明

(1) 系统的幅频特性 $|H(j\omega)|$ 在整个频率范围内为常数。

(2) 系统的相频特性 $\varphi(j\omega)$ 与 ω 成比例，且通过原点。

2. 表达式

$$\begin{cases}|H(j\omega)|=k & -\infty<\omega<\infty\\ \varphi(\omega)=-\omega t_0\end{cases} \tag{2-9}$$

例 2-5　如图 2.13(a)所示电路，欲使响应 $y(t)$ 不产生失真，求 R_1、R_2 的值。

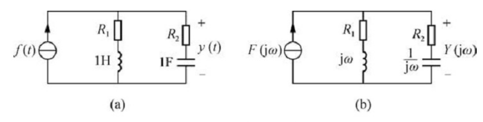


图 2.13　例 2-5 图

解　图 2.13(a)所示电路的频域模型如图 2.13(b)所示。故有



$$Y(\mathrm{j}\omega)=\frac{(R_1+\mathrm{j}\omega)(R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega})}{(R_1+\mathrm{j}\omega)+R_2+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}}F(\mathrm{j}\omega)$$

故得到系统函数为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)}=\frac{(R_1R_2+1)+\mathrm{j}(\omega R_2-\frac{R_2}{\omega})}{(R_1+R_2)+\mathrm{j}(\omega-\frac{1}{\omega})}=\frac{(R_1R_2+1)\omega+\mathrm{j}(\omega^2R_2-R_2)}{(R_1+R_2)\omega+\mathrm{j}(\omega^2-1)}$$

故

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\sqrt{\frac{(R_1R_2+1)^2\omega^2+(\omega^2R_2-R_2)^2}{(R_1+R_2)^2\omega^2+(\omega^2-1)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{\omega^2R_2-R_2}{(R_1R_2+1)\omega}-\arctan\frac{\omega^2-1}{(R_1+R_2)\omega}$$

为使系统无失真传输，必须满足无失真传输的条件，即 $\varphi(\omega)=-\omega t_0$，令 $t_0=0$，有

$$\frac{\omega^2R_2-R_2}{(R_1R_2+1)\omega}=\frac{\omega^2-1}{(R_1+R_2)\omega}$$

整理得到

$$\begin{cases}R_1R_2+R_2^2=R_1R_2+1\\R_1R_2+R_1^2=R_1R_2+1\end{cases}$$

所以得到

$$R_1=R_2=1\Omega$$

再将 $R_1=R_2=1\Omega$ 代入幅值方程得到 $|H(\mathrm{j}\omega)|=1$，所以当 $R_1=R_2=1\Omega$ 时，系统即为无失真传输。

2.2.5　理想低通滤波器

在实际应用中，常常希望改变一个信号所含各频率分量的组成，提取或增加所希望的频率分量，滤除或衰减不希望的频率成分，这样的处理过程称为信号的滤波。对于线性时不变系统，由于输出信号的频谱等于输入信号的频谱乘以系统的频率响应，因此在 LTI 系统中，只要适当地选择系统的频率响应，就可以实现所希望的滤波功能，这就是 LTI 系统的重要应用。

在实际应用中，按照允许通过的频率分量划分，滤波器可分为低通、高通、带通、带阻等几种，它们的幅频特性如图 2.14 所示，其中 ω_c 为低通、高通滤波器的截止角频率；ω_{c1}、ω_{c2} 为带通和带阻滤波器的截止角频率。

若系统的幅频特性 $|H(\mathrm{j}\omega)|$ 在某一段频带保持为一个常数，而在频带外为零；相频特性 $\varphi(\omega)$ 始终为过原点的一条直线，这样的系统称为理想滤波器。也就是说，理想滤波器可以让允许的频率分量全部通过，而不允许通过的频率分量则被全部抑制掉。

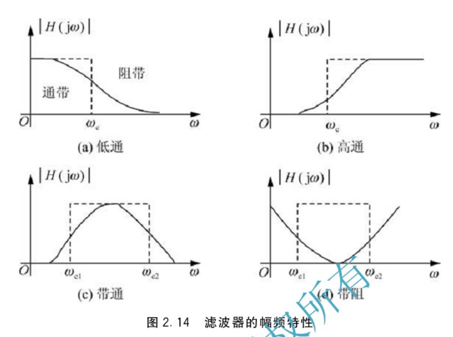
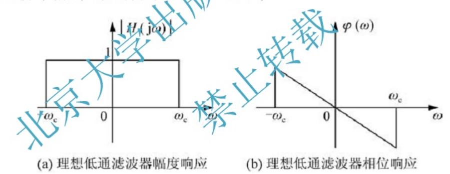


图 2.14　滤波器的幅频特性

1. 理想低通滤波器的冲激响应

理想低通滤波器，它将无失真地传输低于某一角频率 ω_c 的信号，而阻止角频率高于 ω_c 的信号通过，其频率响应特性如图 2.15 所示。



(a) 理想低通滤波器幅度响应　　(b) 理想低通滤波器相位响应

图 2.15　理想低通滤波器频谱响应

设理想低通滤波器的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

对 $H(\mathrm{j}\omega)$进行傅里叶反变换，得到系统的冲激响应 $h(t)$为

$$\begin{aligned}h(t)&=\mathrm{FT}[H(\mathrm{j}\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-t_0)}}{\mathrm{j}(t-t_0)}\bigg|_{-\omega_c}^{\omega_c}=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin[\omega_c(t-t_0)]}{\omega_c(t-t_0)}=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]\end{aligned}\tag{2-10}$$

其波形如图 2.16 所示。

由图可见，理想低通滤波器的冲激响应的峰值比输入的 $\delta(t)$延迟了 t_0，而且输出脉冲在其输入之前已经出现。对于实际的物理系统，当 $t<0$ 时，输入信号尚未接入，不可能有输出。出现这样结果的原因是理想低通滤波器具有理想化的数学模型，属于非因果系

统，物理上是不可实现的。

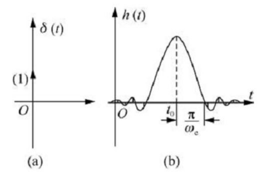


图 2.16 理想低通滤波器的冲激响应

2. 理想低通滤波器的阶跃响应

由于阶跃信号的傅里叶变换为 $F[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$，故可以利用卷积的方法求得理想滤波器的阶跃响应 $g(t)$ 为

$$g(t)=h(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(\tau-t_0)]\mathrm{d}\tau$$

令 $x=\omega_c(\tau-t_0)$，则 $\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}x}{\omega_c}$，代入上式得

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\omega_c(t-t_0)}\mathrm{Sa}(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{Sa}(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_c(t-t_0)}\mathrm{Sa}(x)\mathrm{d}x \qquad (2-11)$$

上式的积分称为正弦积分，记为

$$\mathrm{Si}(y)=\int_{0}^{y}\mathrm{Sa}(x)\mathrm{d}x$$

所以，阶跃响应可以改写为

$$g(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_c(t-t_0)] \qquad (2-12)$$

由表达式画出理想低通滤波器的阶跃响应曲线图如图 2.17 所示。

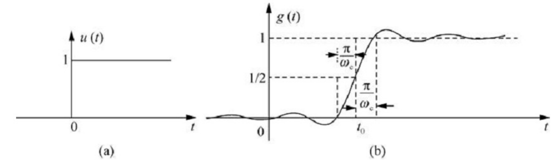


图 2.17 理想低通滤波器的阶跃响应

由图可知，与 $h(t)$ 相同，理想低通滤波器的阶跃响应 $g(t)$ 也有起伏，且起伏频率也等于 ω_c，和 $h(t)$ 不同的是起伏的幅度与 ω_c 无关，而且随着 ω_c 的增大，起伏的极值更为密集，且更趋近于 $t=t_0$ 的位置，这就是有名的吉布斯现象。





小知识：

理想低通滤波器是无法实现的，但通过对它的研究可以得到许多有用的结论。

(1) 过渡时间与带宽成反比。

(2) 在信号时间波形的不连续处，其傅里叶变换收敛于不连续点左右极限的平均值。这一结论常用来定义函数不连续点处的数值。

(3) 由于理想低通滤波器的通频带在$\pm\omega_c$处突然截断，从而引起吉布斯现象，并一直延伸至$t=\pm\infty$。这说明，在通带与阻带之间加一个渐变的过渡带，一方面可以减弱振荡现象，另一方面也使低通滤波器成为物理可实现的系统。

例 2-6 如图 2.18(a)所示系统，已知$H_1(\mathrm{j}\omega)=U(\omega+\omega_1)-U(\omega-\omega_1)$，$H_2(\mathrm{j}\omega)=U(\omega+\omega_2)-U(\omega-\omega_2)$，$\omega_2>\omega_1$，$H_1(\mathrm{j}\omega)$、$H_2(\mathrm{j}\omega)$的图形如图 2.18(b)、(c)所示，(1)求系统的冲激响应$h(t)$；(2)将$H_1(\mathrm{j}\omega)$、$H_2(\mathrm{j}\omega)$的位置互换，再求系统的冲激响应$h(t)$。

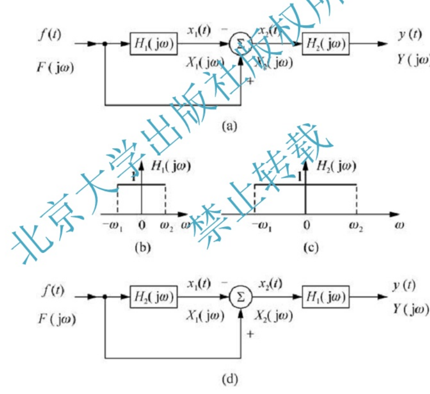


图 2.18 例 2-6 图

解 (1) 由于$X_1(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)H_1(\mathrm{j}\omega)$

$$X_2(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)-X_1(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)-F(\mathrm{j}\omega)H_1(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)[1-H_1(\mathrm{j}\omega)]$$

$$Y(\mathrm{j}\omega)=X_2(\mathrm{j}\omega)H_2(\mathrm{j}\omega)=F(\mathrm{j}\omega)[1-H_1(\mathrm{j}\omega)]H_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{F(\mathrm{j}\omega)}=[1-H_1(\mathrm{j}\omega)]H_2(\mathrm{j}\omega)=H_2(\mathrm{j}\omega)-H_1(\mathrm{j}\omega)H_2(\mathrm{j}\omega)$$

$$=H_2(\mathrm{j}\omega)-H_1(\mathrm{j}\omega)=G_{2\omega_2}(\omega)-G_{2\omega_1}(\omega)$$

故得 $h(t)=\dfrac{\omega_2}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_2 t)-\dfrac{\omega_1}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_1 t)$，$t\in R$

（2）对于互换后的系统，同理可得

$$H(\mathrm{j}\omega)=H_1(\mathrm{j}\omega)-H_1(\mathrm{j}\omega)H_2(\mathrm{j}\omega)=H_1(\mathrm{j}\omega)-H_1(\mathrm{j}\omega)=0$$

故得 $h(t)=0$，该系统为全不通系统。

2.2.6　抽样信号与抽样定理

前面讨论的是连续信号，这种信号一般加工质量不高，为了使信号便于加工处理与传输，一般对之进行抽样，使之离散化，变成离散信号，加工处理完后，再将离散信号恢复为原来的信号，故抽样是整个过程的一个关键环节，而抽样定理为连续信号与离散信号的相互转换提供了理论依据。

1. 带限信号

如果信号 $f(t)$ 的频谱宽度为有限值，即 $F(\mathrm{j}\omega)$ 满足

$$F(\mathrm{j}\omega)=0 \quad |\omega|\geqslant\omega_{\mathrm{m}} \tag{2-13}$$

$F(\mathrm{j}\omega)$ 的图形如图 2.19(a)所示，则称 $f(t)$ 为带限信号，ω_{m} 为信号的频谱宽度，亦即信号频谱中的最高频率。



小知识：

带限信号：它是工程测试名词。频限信号是在频域内占据一定的带宽，而其外恒等于零，因此又称带限信号。例如，正弦信号、限带白噪声等。若信号在频域内的带宽延伸至无穷区间，则称为频域无限信号。

根据前面讲解可知，若 $F(\mathrm{j}\omega)$ 的频谱宽度为有限值，则其 $f(t)$ 必定为无时限信号，故可设 $f(t)$ 的图形如图 2.19(b)所示。

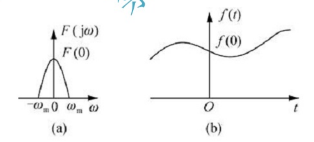


图 2.19　限带信号的定义

2. 抽样信号 $f_{\mathrm{s}}(t)$

图 2.20(a)所示是为获得抽样信号的的系统模型，为一个乘法器(也称调制器)，其中 $f(t)$ 为被抽样信号(为无时限信号)，设其波形为图 2.20(b)所示；单位冲激序列 $\delta_{\mathrm{T}}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$ 为用来对 $f(t)$ 进行抽样的信号，$k\in\mathbf{Z}$，T(单位：s)称为抽样间隔或抽样周期，$f=\dfrac{1}{T}$ 称为抽样频率，$\delta_{\mathrm{T}}(t)$ 的波形为图 2.20(c)所示。乘法器的输出信号为

$$
\begin{aligned}
f_{s}(t) &= f(t)\delta_{T}(t) = f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-kT) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)
\end{aligned}
\tag{2-14}
$$

$f_{s}(t)$称为抽样信号，设其波形为图 2.20(d)所示。可见 $f_{s}(t)$仍为冲激序列，每个冲激的强度都是连续时间信号 $f(t)$在 $t=kT$ 时刻的函数值 $f(kT)$，$k\in\mathbf{Z}$。由于这种抽样是用单位冲激序列 $\delta_{T}(t)$进行抽样的，故称为均匀冲激抽样或理想抽样。

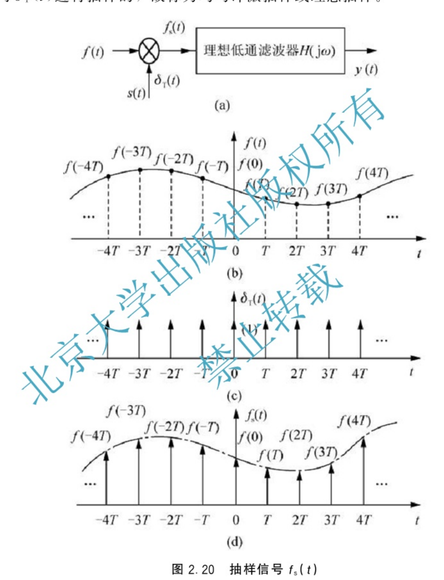


图 2.20　抽样信号 $f_{s}(t)$

3. 抽样信号的频谱 $F_{s}(j\omega)$

设 $F(j\omega)$的图形如图 2.21(a)所示，$S(j\omega)=F[\delta_{T}(t)]=\Omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\Omega)$，$\Omega=\dfrac{2\pi}{T}$

$S(j\omega)$的图形如图 2.21(b)所示。抽样信号的傅里叶变换为



$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*S(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\Omega\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\Omega)$$
$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(j\omega)*\delta(\omega-k\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F[j(\omega-k\Omega)]k\in\mathbf{Z} \tag{2-15}$$

$F_s(j\omega)$的图形如图2.21(c)所示。由此图可见，只要满足条件

$$\Omega\geqslant 2\omega_m \tag{2-16}$$

则$F_s(j\omega)$中的各个图形就不产生重叠，这样$F_s(j\omega)$中的每一个图形就都包含了$F(j\omega)$中的全部信息，也即$f_s(t)$中包含了$f(t)$中的全部信息。

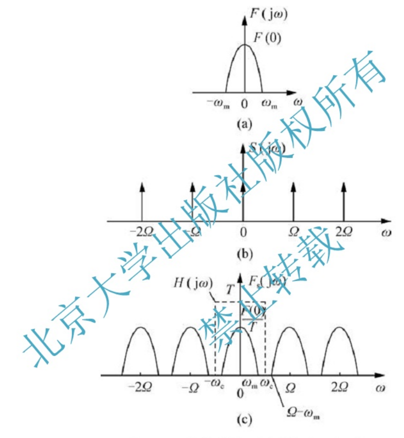


图2.21　抽样信号$f_s(t)$的频谱$F_s(j\omega)$

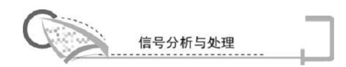
因$\Omega=\frac{2\pi}{T}$，$f_m=\frac{\omega_m}{2\pi}$，$f_m$为$F(j\omega)$中的最高频率。于是条件表达式又可以写为

$$T\leqslant\frac{1}{2f_m}\text{或}\ f\geqslant 2f_m \tag{2-17}$$

即当抽样周期$T\leqslant\frac{1}{2f_m}$或抽样频率$f\geqslant 2f_m$时，$F_s(j\omega)$中的各个图形就不会产生重叠。

4. 抽样定理

如果$f(t)$为带宽有限的连续信号，其$F(j\omega)$的最高频率为f_m，则以抽样周期$T_s\leqslant\frac{1}{2f_m}$，对$f(t)$进行等间隔抽样，得到的取样信号$f_s(t)$将包含$f(t)$的全部信息，因而可以



从 $f_s(t)$中完全恢复出 $f(t)$。

5. 奈奎斯特频率 f_N 或奈奎斯特周期(或奈奎斯特间隔)T_N

把 $\omega_N=2\omega_m$ 称为奈奎斯特角频率；把 $f_N=2f_m=\frac{\omega_m}{\pi}$称为奈奎斯特频率；把 $T_N=\frac{1}{2f_m}=\frac{\pi}{\omega_m}$称为奈奎斯特周期(或奈奎斯特间隔)。可见 f_N 就是使 $F_s(j\omega)$中的各个图形不产生重叠的最小抽样频率；T_N 就是使 $F_s(j\omega)$中的各个图形不产生重叠的最小抽样周期。

6. 原信号 $f(t)$的恢复

虽然抽样信号 $f_s(t)$包含了原信号 $f(t)$中的全部信息，但毕竟 $f_s(t)$不是 $f(t)$。今为了把 $f_s(t)$恢复为 $f(t)$，可使 $f_s(t)$通过一个理想的低通滤波器，如图 2.21(a)所示，且理想低通滤波器的频率特性为

$$H(j\omega)=TG_{2\omega_c}(\omega),\ \varphi(\omega)=0$$

式中：ω_c 称为理想低通滤波器的截止频率，且 ω_c 应满足条件

$$\omega_m\leqslant\omega_c\leqslant\Omega-\omega_m$$

$H(j\omega)$的图形如图 2.21(c)中的虚线所示，故有

$$Y(j\omega)=F_s(j\omega)H(j\omega)=F_s(j\omega)TG_{2\omega_c}(\omega)=F(j\omega)$$

$Y(j\omega)$为理想滤波器输出信号 $f(t)$的傅里叶变换，经反变换得到

$$y(t)=F^{-1}[Y(j\omega)]=f(t)$$

可见恢复了原信号 $f(t)$。

2.3 连续时间系统的复频域分析

所谓系统的复频域分析就是利用拉普拉斯来求解，复频域分析的优点：①求解的步骤得到简化，同时可以给出微分方程的特解和通解，而且初始条件自动的包含在变换式里；②拉氏变换分别将“微分”和“积分”运算转换为“乘法”和“除法”运算，即把积分、微分方程转换为代数方程。这种变换与初等数学中把乘除法被转换为加减法运算很相似；③指数函数、超越函数及有不连续点的函数，经过拉氏变换可转换为初等函数，简化了计算；④拉氏变换把时域中两个信号的卷积运算转换为变换域中两函数的乘法运算，在此基础上建立了系统函数的概念，这一概念的应用为研究信号通过线性系统提供了许多方便；⑤用系统函数的零极点分布可以简明、直观地表达系统性能的许多规律，从而可以从零极点特性来考察和处理各种问题。

2.3.1 复频域分析的基础

它在频域分析的基础上引入复指数信号 e^{st} 为基本信号，其中 $s=\sigma+j\omega$，称为复频率。对于 $f(t)$，可将其分解为基本信号 e^{st} 之和，则系统的响应为基本信号的响应之和，这种方法称为复频域分析法。分解原因：①e^{st} 形式简单，其响应的求解也较简单；②系统是线性的，可以用叠加原理。

1. 基本信号 e^{st} 的激励下的零状态响应

1）公式

$$y_{zs}(t)=H(s)e^{st} \tag{2-18}$$

2）公式推导

由前面的讲解可知 $y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=e^{st}*h(t)$

按卷积展开有

$$y_{zs}(t)=e^{st}*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau=e^{st}\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{st}H(s)$$

$$\therefore y_{zs}(t)=H(s)e^{st}$$

该式为复频域分析的基础。这里 $H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ ，称为系统函数。

3）系统函数 $H(s)$ 的求法

（1）求出 $h(t)$，再利用 $H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ 求取 $H(s)$。

（2）求出 $Y_{zs}(s)$、$F(s)$，再利用 $H(s)=\dfrac{Y_{zs}(s)}{F(s)}$ 求取 $H(s)$。

（3）已知微分方程利用下式求取 $H(s)$。

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+b_{m-2}s^{m-2}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

2. 一般信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应 $y_{zs}(t)$

由 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}F(s)e^{st}ds$ 可知，$f(t)$ 可表示为若干个基本信号 e^{st} 的线性组合，故可用叠加原理求一般信号 $f(t)$ 激励下的零状态响应 $y_{zs}(t)$。

1）表达式

$$y_{zs}(t)=L^{-1}[F(s)H(s)] \tag{2-19}$$

2）推导

$$e^{st}\rightarrow H(s)e^{st}\text{（复频域分析的基础）}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi j}F(s)e^{st}ds\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi j}F(s)H(s)e^{st}ds\text{（系统的齐次性）}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi j}F(s)e^{st}ds\rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi j}F(s)H(s)e^{st}ds\text{（系统的叠加性）}$$

$$\therefore f(t)\rightarrow y_{zs}(t)=L^{-1}[F(s)H(s)]$$

3）求解步骤

（1）$f(t)\rightarrow F(s)$。

（2）求系统函数 $H(s)$。

（3）求 $y_{zs}(t)$ 的拉氏正变换 $Y_{zs}(s)=F(s)H(s)$。

（4）求 $Y_{zs}(s)$ 的拉氏逆变换。

例 2-7　已知线性连续系统的激励信号为 $f_1(t)=e^{-t}u(t)$ 时，系统的零状态响应为 $y_{zs1}(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$。若系统的激励信号为 $f_2(t)=tu(t)$ 时，求系统的零状态响应 $y_{zs2}(t)$。

解：(1) 求 F(s)

$$F(s)=F_2(s)=\frac{1}{s^2}$$

(2) 系统函数 $H(s)$

$$H(s)=\frac{Y_{zs1}(s)}{F_1(s)}=\frac{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}}{\frac{1}{s+1}}=\frac{1}{s+2}$$

(3) 求 $Y_{zs}(s)$

$$Y_{zs}(s)=F(s)H(s)=\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{s^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s}+\frac{1}{4}\frac{1}{s+2}$$

(4) 求 $Y_{zs}(s)$的拉氏逆变换

$$y_{zs}(t)=y_{zs2}(t)=\frac{1}{2}tu(t)-\frac{1}{4}u(t)+\frac{1}{4}e^{-2t}u(t)$$

2.3.2 微分方程的复频域求解

此法求解步骤如下。

(1) 对线性微分方程中的每一项进行拉普拉斯变换，使微分方程变为复变量 s 的代数方程，此代数方程常称为变换方程。

(2) 求解变换方程，得到系统输出变量的 s 域表达式。

(3) 对输出的 s 域表达式利用部分分式法进行拉普拉斯逆变换，得到输出时域表达式。

对于二阶微分方程$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)=b_2\frac{d^2}{dt^2}f(t)+b_1\frac{d}{dt}f(t)+b_0f(t)$，设 $f(t)$为因果信号，则 $f(0_-)$、$f'(0_-)$为 0，利用上面步骤可得到

$$Y(s)=\frac{[(s+a_1)y(0_-)+y'(0_-)]}{(s^2+a_1s+a_0)}+\frac{(b_2s^2+b_1s+b_0)}{(s^2+a_1s+a_0)}F(s) \tag{2-20}$$

令

$$A(s)=s^2+a_1s+a_0$$
$$B(s)=b_2s^2+b_1s+b_0$$
$$N(s)=(s+a_1)y(0_-)+y'(0_-)$$

$$\therefore Y(s)=\frac{N(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}F(s) \tag{2-21}$$

说明由于 $y(0_-)$、$y'(0_-)$分别为 $y(t)$、$y'(t)$在 $t=0_-$时刻的初始值，因此 $y(0_-)$、$y'(0_-)$可由 $t=0_-$时刻状态来确定。而 $A(s)=0$ 为特征方程，$A(s)=0$ 的根为特征根。所以 $Y(s)$的第一项$\frac{N(s)}{A(s)}$只与 $y(0_-)$、$y'(0_-)$有关，与 $f(t)$无关，故它是系统的零输入响应的拉氏变换 $Y_{zi}(s)$；$Y(s)$的第二项$\frac{F(s)B(s)}{A(s)}$与 $y(0_-)$、$y'(0_-)$无关，与 $f(t)$有关，故它是系统的零状态响应的拉氏变换 $Y_{zs}(s)$。

$$Y(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)\Leftrightarrow y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

这里

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]$$
$$y_{zi}(t)=L^{-1}[Y_{zi}(s)]$$
$$y_{zs}(t)=L^{-1}[Y_{zs}(s)]$$

例 2-8　已知线性系统的微分方程为

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+3\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=2\frac{d}{dt}f(t)+6f(t)$$

$f(t)=u(t)$，$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=1$，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$，零状态响应 $y_{zs}(t)$，全响应 $y(t)$。

解　利用上面公式

$$Y(s)=\frac{(s+a_1)y(0_-)+y'(0_-)}{s^2+a_1s+a_0}+\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}F(s)$$

得到

$$Y_{zi}(s)=\frac{2s+7}{s^2+3s+2}=\frac{5}{s+1}-\frac{3}{s+2}$$

$$Y_{zs}(s)=\frac{2s+6}{s^2+3s+2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{3}{s}-\frac{4}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

逆变换后得到

$$y_{zi}(t)=5e^{-t}u(t)-3e^{-2t}u(t)$$
$$y_{zs}(t)=3u(t)-4e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)$$
$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=3u(t)+e^{-t}u(t)-2e^{-2t}u(t)$$

2.3.3　电路的复频域模型

实际上，在分析具体电路时，可不必先列写微分方程再利用拉普拉斯变换来分析，而是直接根据原电路图画出其复频域模型，再用与电路理论一样的分析方法和定理直接列写复频域的代数方程，然后求解复频域响应并进行拉普拉斯反变换。现讨论如下。

1. 电路定律的 s 域形式

时域　　KCL：$\sum i(t)=0$

　　　　KVL：$\sum u(t)=0$

s 域　　KCL：$\sum I(s)=0$

　　　　KVL：$\sum U(s)=0$

2. 电路元件的 s 域形式(在关联参考方向下讨论)

1）电阻元件

电阻元件的时域模型如图 2.22(a)所示，其伏安关系为

$$u(t)=Ri(t)$$

两边同时拉普拉斯变换，得到其复频域伏安关系为

$$U(s)=RI(s)$$

其复频域模型如图 2.22(b)所示。

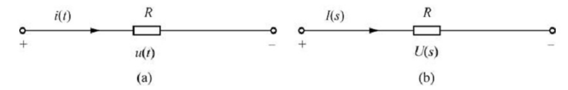


图 2.22　电阻元件时域和复频域模型

2）电容元件

电容元件的时域模型如图 2.23(a)所示，其伏安关系为

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\text{ 或 }u(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(t)\mathrm{d}t=u(0_{-})+\frac{1}{C}\int_{0}^{t}i(t)\mathrm{d}t$$

式中：$u(0_{-})$为 $t=0_{-}$ 时电容上的初始电压。

两边同时进行拉普拉斯变换，得到其复频域伏安关系为

$$I(s)=CsU(s)-Cu(0_{-})\text{ 或 }U(s)=\frac{1}{s}u(0_{-})+\frac{1}{Cs}I(s)$$

式中：$\frac{1}{Cs}$称为电容 C 的复容抗；$\frac{1}{s}u(0_{-})$为电容元件初始电压 $u(0_{-})$的象函数，可等效为附加独立电压源；$Cu(0_{-})$可等效为附加独立电流源。其复频域模型如图 2.23(b)、(c)所示，图 2.23(b)表示并联模型，图 2.23(c)表示串联模型。

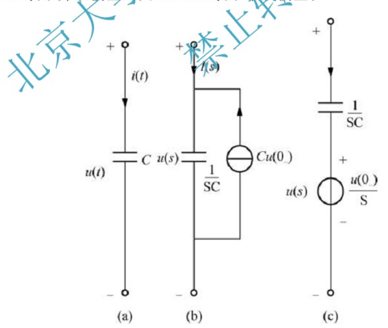


图 2.23　电容元件时域和复频域模型

3）电感元件

电感元件的时域模型如图 2.24(a)，其伏安关系为



$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\text{ 或 }i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(t)\mathrm{d}t=i(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(t)\mathrm{d}t$$

式中：$i(0_-)$为$t=0_-$时电感上的初始电流。

两边同时拉普拉斯变换，得到其复频域伏安关系为

$$U(s)=LsI(s)-Li(0_-)\text{ 或 }I(s)=U(s)/Ls+i(0_-)/s$$

式中：Ls 称为电感 L 的复感抗；$i(0_-)/s$ 为电感元件初始电流 $i(0_-)$的象函数，可等效为附加独立电流源；$Li(0_-)$可等效为附加独立电压源。其复频域模型如图 2.24(b)、(c)，图 2.24(b)表示串联模型，图 2.24(c)表示并联模型。

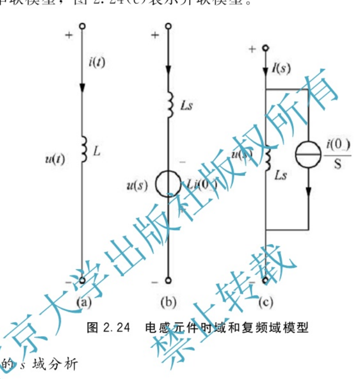


图 2.24　电感元件时域和复频域模型

3. 电路系统的 s 域分析

把电路中每个元件都用它的复频域模型来代替，再将信号源及各分析变量用其拉普拉斯变换式来代替，就可由时域模型得到复频域模型。在复频域电路中，电压 $U(s)$与电流 $I(s)$的关系是代数关系，可以运用与电阻电路一样的分析方法与定理列写求解响应的变换式。

在对线性连续电路系统的复频域分析中，一般步骤如下。

(1) 根据换路前的电路求 $t=0_-$时刻电感的初始电流 $i_L(0_-)$和电容的初始电压 $u_C(0_-)$。

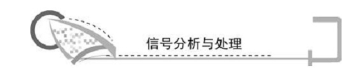
(2) 求电路激励的拉普拉斯变换。

(3) 画出换路后电路的复频域模型。

(4) 运用电路的分析方法对复频域模型列写方程组，并求解，得到各响应的象函数。

(5) 对求得的象函数逆变换，得到时域响应。

例 2-9　已知 RLC 串联电路如图 2.25(a)所示，输入信号 $u_i(t)=tu(t)$，$i_L(0_-)=1\text{A}$，$u_C(0_-)=1\text{V}$，$L=1\text{H}$，$C=0.2\text{F}$，$R=2\Omega$。试画出该系统的复频域模型，并计算出电流 $i(t)$。



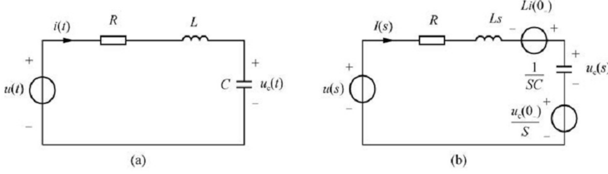


图 2.25　例 2-9 图

解　RLC 串联电路复频域模型如图 2.24(b)所示，则

$$I(s)=\frac{U_{\mathrm{i}}(s)+Li_{\mathrm{L}}(0_{-})-\dfrac{u_C(0_{-})}{s}}{R+Ls+\dfrac{1}{sC}}=\frac{\frac{1}{5}}{s}+\frac{\frac{4}{5}s-\frac{7}{5}}{(s+1)^2+2^2}$$

求得拉普拉斯逆变换为

$$i(t)=\frac{1}{5}u(t)+\frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t)u(t)-\frac{7}{5}\mathrm{e}^{-2t}\sin(2t)u(t)$$

2.3.4　复频域的系统函数 $H(s)$

1. 系统函数的定义

系统的零状态响应的拉普拉斯变换与激励的拉普拉斯变换之比称为复频域的“系统函数”，记作 $H(s)$。对于已知系统的微分方程，当系统的初始状态为 0 时，方程两边同时进行拉普拉斯变换可得

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+b_{m-2}s^{m-2}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}\tag{2-22}$$

对于已知具体电路图，系统函数也可由零状态下系统的的复频域模型直接获得。

2. 系统框图化简

在工程分析中，人们较喜欢采用方框图表示。一个大系统可由许多子系统作适当连接组成，当各个子系统的系统函数已知时，可通过框图化简求得系统的系统函数。若两个系统级联在一起，整个系统相当于一个系统函数为 $H_1(s)H_2(s)$ 的系统，如图 2.26 所示；若两个系统并联在一起，整个系统相当于一个系统函数为 $H_1(s)+H_2(s)$ 的系统，如图 2.27 所示。

F(s) → H₁(s) → H₂(s) → Y(s)　⇨　F(s) → H₁(s)H₂(s) → Y(s)

图 2.26　两个子系统的级联

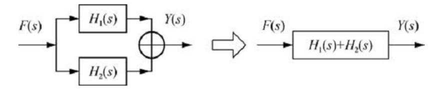


图 2.27　两个子系统的并联

3. 系统函数的零极点

一般来说，线性系统的系统函数以多项式之比的形式出现。系统函数分母多项式 $A(s)=0$ 的根称为系统函数的极点，而系统函数分子多项式 $B(s)=0$ 的根称为系统函数的零点。$A(s)$和 $B(s)$都可以分解成线性因子的乘积，即

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=\frac{b_m\prod_{j=1}^{m}(s-s_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} \tag{2-23}$$

把系统函数的零点与极点表示在 s 平面上的图形称为系统函数的零极点图。其中零点用"○"表示，极点用"×"表示。若为 n 重极点或零点，则注以(n)。

例 2-10　某系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{s^2(s+3)}{(s+1)(s+2+\mathrm{j})(s+2-\mathrm{j})}$$

该系统的零极点分布如图 2.28 所示。

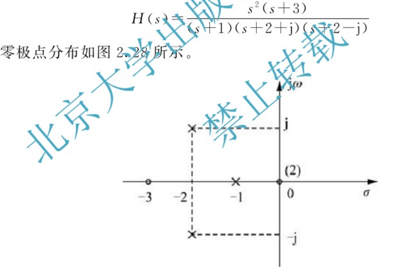


图 2.28　系统函数的零极点分布图

借助系统函数 $H(s)$在 s 平面的零极点分布的研究，可以简明、直观地给出系统响应的许多规律。

4. 系统函数的零极点分布与系统冲激响应特性的关系

从拉普拉斯变换已知，$H(s)$的拉普拉斯逆变换即为 $h(t)$，而 $h(t)$的形式主要取决于 $H(s)$的极点。

1）极点分布对冲激响应的影响

对于一阶极点的情况，如图 2.29 所示，可以看出 $H(s)$的极点与 $h(t)$的关系如下。

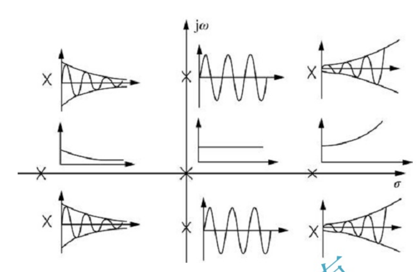


图 2.29　$H(s)$的一阶极点与对应的 $h(t)$的波形

(1) $H(s)$的极点位于 s 平面的原点时，$H(s)=\frac{1}{s}$，$p_1=0$ 不在原点，则 $h(t)=u(t)$，冲激响应是一个阶跃信号。

(2) $H(s)$的极点位于 s 平面的实轴上时，$H(s)=\frac{1}{s+a}$，$p_1=-a$ 在原点，则 $h(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)$。当 $a>0$ 时，极点位于左实轴上，$h(t)$按指数衰减；当 $a<0$ 时，极点位于右实轴上，$h(t)$按指数增加。

(3) $H(s)$的极点位于 s 平面的虚轴上时，$H(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$，$p_{1,2}=\pm \mathrm{j}\omega$，则 $h(t)=\sin(\omega t)u(t)$，冲激响应是等幅振荡。

(4) $H(s)$的极点位于 s 平面的共轭极点时，$H(s)=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$，当 $a>0$ 时，极点位于左半平面，对应 $h(t)$是衰减振荡；当 $a<0$ 时，极点位于右半平面，对应 $h(t)$是增幅振荡。

对应二阶极点的情况，如图 2.30 所示，可以看出 $H(s)$的极点与 $h(t)$的关系如下。

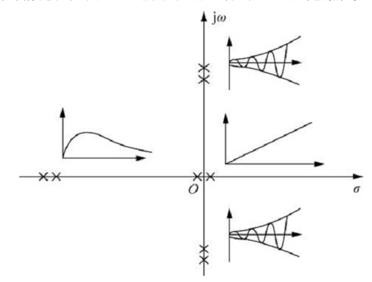


图 2.30　$H(s)$的二阶极点与对应的 $h(t)$的波形



(1) 若 $H(s)=\frac{1}{s^2}$，极点在原点，则 $h(t)=tu(t)$，冲激响应是一个斜变信号。

(2) 若 $H(s)=\frac{1}{(s+a)^2}$，极点在实轴上，则 $h(t)=te^{-at}u(t)$，当 $a>0$ 时，冲激响应是一个有起伏特性的衰减函数；当 $a<0$ 时，冲激响应是一个有起伏特性的递增函数。

(3) 若 $H(s)=\frac{2s}{(s^2+\omega^2)^2}$，极点在虚轴上，则 $h(t)=t\sin tu(t)$，冲激响应是一个增幅振荡。



小提醒：

(1) 当 $H(s)$ 的极点位于 s 平面的左半平面时，则系统的冲激响应 $h(t)$ 为衰减的指数或正弦函数，当 $t\to\infty$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=0$，此时 $H(s)$ 所代表的的系统通常称为稳定系统。

(2) 当 $H(s)$ 的极点位于 s 平面的右半平面时，则系统的冲激响应 $h(t)$ 为增长的指数或正弦函数，当 $t\to\infty$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty}h(t)=+\infty$，此时 $H(s)$ 所代表的的系统通常称为不稳定系统。

(3) 当 $H(s)$ 的极点位于虚轴上的一阶极点，则系统的冲激响应 $h(t)$ 为等幅振荡或恒定函数，对应的系统时临界稳定系统。虚轴上的高阶极点所对应的的系统是不稳定系统。

2) 零点分布对冲激响应的影响

$H(s)$ 的零点分布可影响系统的幅度与相位。设系统函数

$$H_1(s)=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

其零点为 $s=-1$，则冲激响应为

$$h_1(t)=e^{-t}\cos tu(t)$$

若系统函数改为

$$H_2(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2+1}$$

其零点为 $s=-2$，但极点没变，则冲激响应为

$$h_2(t)=\sqrt{2}e^{-t}\cos(t-45^\circ)u(t)$$

将 $h_1(t)$ 与 $h_2(t)$ 比较可知，若零点变动而极点不变，则 $h(t)$ 函数的形式并不改变，但其幅度和相位却会有所变化。

5. 系统频率响应特性的确定

利用系统函数的零极点分布借助几何作图法确定系统的频率响应特性 $H(j\omega)$，下面介绍这种方法。

若 $H(s)$ 的极点均位于 s 的左半平面，令 $s=j\omega$，即在 s 平面上令 s 沿虚轴变化，则有 $H(s)|_{s=j\omega}=H(j\omega)$，即为频率响应特性。具体表达式如下：

$$H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}=H_0\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(j\omega-s_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(j\omega-p_i)}$$

如图 2.31 所示为零点 s_j 和极点 p_i 与虚轴上某点 $j\omega$ 连接构成的零点矢量 $j\omega - s_j$ 和极点矢量 $j\omega - p_i$。

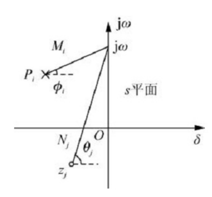


图 2.31 零点矢量和极点矢量

图中，N、M 分别表示零点矢量和极点矢量的模，θ_j、φ_i 分别表示它们的相角。即

$$j\omega - s_j = N_j e^{\theta_j}$$

$$j\omega - p_i = M_i e^{\varphi_i}$$

于是得到

$$H(j\omega) = \frac{H_0 N_1 \cdots N_m}{M_1 \cdots M_N} e^{j[(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_m) - (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m)]} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

所以幅频特性为

$$|H(j\omega)| = \frac{H_0 \prod_{j=1}^{m} N_j}{\prod_{i=1}^{n} M_i} \tag{2-24}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \tag{2-25}$$

当 ω 自原点沿着虚轴运动并趋于无穷大时，各零点矢量和极点矢量的模和幅角都随之改变，于是得出幅频特性和相频特性曲线。

例 2-11 研究图 2.32 所示 RC 电路的频响特性。

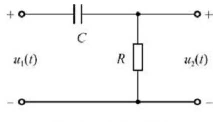


图 2.32 例 2-11 图

解 由图可得系统函数为

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$H(\mathrm{j}\omega)=H(s)\big|_{s=\mathrm{j}\omega}=\frac{\mathrm{j}\omega}{\mathrm{j}\omega+\dfrac{1}{RC}}$$

零点矢量 $\mathrm{j}\omega-s_1=N_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_1}$，极点矢量为 $\mathrm{j}\omega-p_1=M_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$，于是

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{N_1}{M_1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1-\varphi_1)}=|H(\mathrm{j}\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{N_1}{M_1},\ \varphi(\omega)=\theta_1-\varphi_1$$

图 2.33 和图 2.34 分别为零极点确定频响特性曲线和频响特性。可见，该 RC 电路具有高通滤波器的特性。

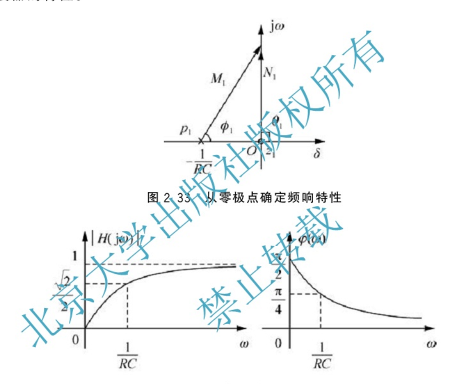


图 2.33　从零极点确定频响特性

图 2.34　RC 高通滤波器频响特性


小提醒：

一般来说，如果系统函数的某一个极点十分靠近虚轴，那么当角频率在该极点虚部附近时，幅频特性有一个峰值，相频特性急剧减小。类似地，如果系统函数有一个零点十分靠近虚轴，那么当角频率在该零点虚部附近时，幅频特性有一个谷值，相频特性急剧增大。

6. 系统函数的零极点分布与系统响应形式之间的关系

由于系统的响应为

$$Y(s)=\frac{N(s)}{A(s)}+\frac{B(s)}{A(s)}F(s)=\frac{N(s)}{A(s)}+H(s)F(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs}(s)$$

若将 $F(s)$ 的分子分母多项式进行因式分解得到

$$F(s)=\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-s_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)}$$

则

$$Y_{zs}(s)=H_0\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-s_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}\cdot\frac{\prod_{l=1}^{u}(s-s_l)}{\prod_{k=1}^{v}(s-p_k)}$$

若 $Y_{zs}(s)$函数中不含有多重极点，则可展成部分分式

$$Y_{zs}(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-p_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{s-p_k}$$

逆变换得到

$$y_{zs}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{p_i t}u(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k e^{p_k t}u(t)$$

上式表明，零状态响应由两部分组成：一部分响应的形式取决于系统函数的极点，与外部极点无关，这部分称为系统的自由响应；另一部分响应仅取决于系统激励的极点，称为系统的强迫响应。

对于一个稳定系统，全响应可分为暂态响应和稳态响应。暂态响应指在激励接入后的一段时间，随时间的增加而逐渐减弱，直到消失的那部分分量。全响应中，除掉暂态响应后的分量称为稳态响应。稳定系统 $H(s)$的极点都位于左半 S 平面，零输入响应和自由响应呈衰减形式，属于暂态响应。若 $F(s)$的极点仅位于虚轴上且为单极点，则强迫响应就是稳态响应。

2.4 基于 MATLAB 语言的连续系统分析

2.4.1 MATLAB 在连续时间系统的时域分析中的应用

利用 MATLAB 可以简单方便地求出系统的响应。阶跃响应和冲激响应可分别利用命令 step 和 impulse 来得到，而对于其他类型输入的响应，可利用 lsim 命令来得到。

例 2-12 已知系统的微分方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+f(t)$$

求

(1) 系统的冲击响应、阶跃响应。

(2) 当 $f(t)=2\sin(4\pi t)u(t)$时的零状态响应。

解 MATLAB 程序如下：

```
%example 1
a=[1 3 2];
b=[2 1];
t=0:0.01:3;
f=sin(4*pi*t);
subplot(1,3,1),impulse(b,a);
title('冲激响应');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('Amptitude');
subplot(1,3,2),step(b,a);
title('阶跃响应');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('Amptitude');
subplot(1,3,3),lsim(b,a,f,t);
title('零状态响应');
xlabel('Time(sec)');
ylabel('Amptitude');
```

运行结果图如图 2.35 所示。

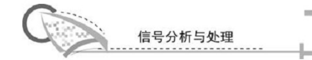
图 2.35　例 2－12 运行结果图

2.4.2　MATLAB 在连续时间系统的频域分析中的应用

利用 MATLAB 可以画出系统的频谱特性曲线。

例 2－13　设某低通滤波器的频率响应为





$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1/RC}{\mathrm{j}\omega+1/RC}$$

试画出系统的幅频和相频特性曲线。

解　该系统的幅频函数

$$|H(\mathrm{j}\omega)|=\frac{1/RC}{\sqrt{\omega^2+(1/RC)^2}}$$

相频函数为

$$\varphi(\omega)=-\arctan(\omega RC)$$

其 MATLAB 程序如下：

```
% example 2
RC=0.001;
w=0:10:5000;
H=(1/RC)./(j*w+1/RC);
magH=abs(H);
angH=180*angle(H)/pi;
subplot(2,1,1),plot(w,magH);
title('RC 低通幅度特性')
xlabel('f(rad/s)');
ylabel('Angle(H);degrees');
subplot(2,1,2),plot(w,angH);
title('RC 低通相位特性')
xlabel('f(rad/s)');
ylabel('Angle(H);degrees');
```

运行结果图如图 2.36 所示。

图 2.36　例 2-13 运行结果图



例 2-14 已知低通滤波器的频率响应为

$$H(\mathrm{j}\omega)=\frac{1/RC}{\mathrm{j}\omega+1/RC}$$

设输入为 $f(t)=\cos 100t+\cos 3000t$，利用 MATLAB 程序求出响应。

解

```
%example 3
RC=0.001;
t=-0.1:0.2/1000:0.1;
w1=100;
w2=3000;
Hw1=(1/RC)./(j*w1+1/RC);
Hw2=(1/RC)./(j*w2+1/RC);
f=cos(w1*t)+cos(w2*t);
y=abs(Hw1)*cos(w1*t+angle(Hw1))+abs(Hw2)*cos(w2*t+angle(Hw2));
subplot(2,1,1),plot(t,f);
xlabel('Time(sec)');
ylabel('x(t)');
subplot(2,1,2),plot(t,y);
xlabel('t/s');
ylabel('y(t)');
```

运行结果图如图 2.37 所示。

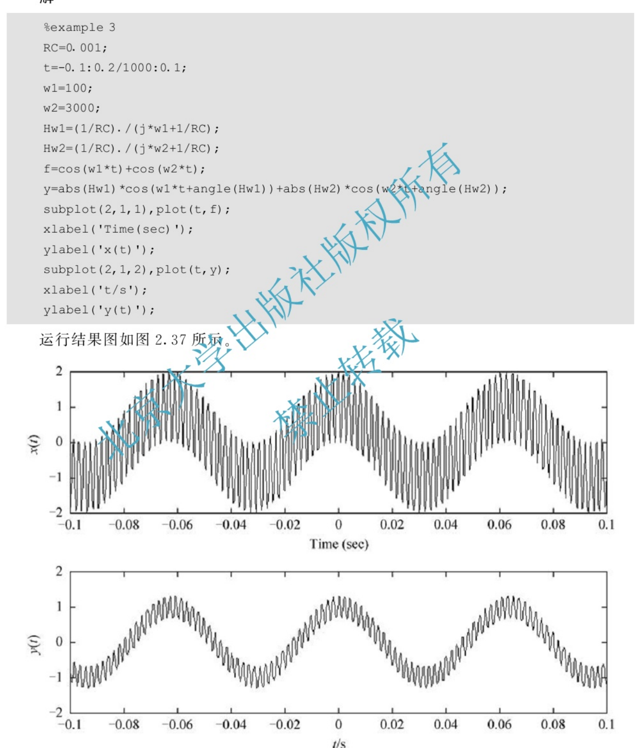


图 2.37 例 2-14 运行结果图

2.4.3 MATLAB 在连续时间系统的 s 域分析中的应用

采用 MATLAB 的 bode 或 freqs 函数，可以精确得到系统的频响特性曲线。

例 2－15 已知滤波器的系统函数为

$$H(s)=\frac{s}{s+1/RC}$$

请研究系统的频响特性。

解

```
%example 4
RC=1;
num=[1 0];
den=[1 1/RC];
w=0:0.01:5;
[mag,phase]=bode(num,den,w);
clf
subplot(2,1,1),plot(w,mag);
xlabel('f(rad/s)');
ylabel('幅度');
subplot(2,1,2),plot(w,phase);
xlabel('f(rad/s)');
ylabel('相位');
```

运行结果图如图 2.38 所示。

图 2.38 例 2－15 运行结果图

例 2-16 已知滤波器的系统函数为

$$H(s)=\frac{s}{s^2+s+1}$$

请研究系统的频响特性。

解

```
%example 5
num=[1 0];
den=[1 1 1];
w=0:0.01:5;
H=freqs(num,den,w);
mag=abs(H);
phase=angle(H)*180/pi;
clf
subplot(2,1,1),plot(w,mag);
xlabel('f(rad/s)');
ylabel('幅度');
subplot(2,1,2),plot(w,phase);
xlabel('f(rad/s)');
ylabel('相位');
```

运行结果图如图 2.39 所示。

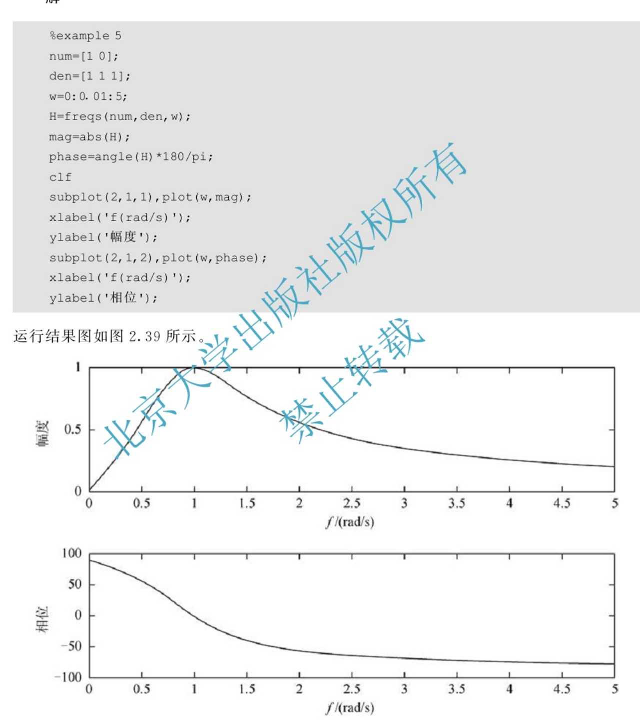


图 2.39 例 2-16 运行结果图

本章小结

1. 连续时间系统的时域分析

包括了已知电路模型利用基尔霍夫定律建立系统的数学模型，连续系统框图的基本构成单元和已知框图利用基本单元输出输入之间的关系求解系统的数学模型，利用卷积法求解系统的零状态响应。

2. 连续时间系统的频域分析

包括了已知电路模型建立系统的频域模型，系统频谱函数的定义、求法、物理意义及应用，非周期信号零状态响应的求法，系统无失真传输的定义、条件，理想低通滤波器的定义、冲激响应和阶跃响应传输的特性，抽样信号的定义、抽样信号的频谱含义及求法、采样定理、奈奎斯特频谱或间隔的定义及求法以及采样信号的恢复。

3. 连续时间系统的复频域分析

包括了系统函数的定义与求法，任意信号零状态响应的求法，微分方程的 s 域求解，已知电路模型建立系统的 s 域模型及电路系统的 s 域求解三大响应，根据系统函数的零极点分布分析、判别系统的时域特性和频域特性。

4. 基于 MATLAB 语言的连续系统分析

MATLAB 在连续系统时域、频域、复频域中的应用及典型例题解析。



拉普拉斯简介

拉普拉斯，法国数学家、天文学家，法国科学院院士。他是天体力学的主要奠基人、天体演化学的创立者之一，他还是分析概率论的创始人，因此可以说他是应用数学的先驱。



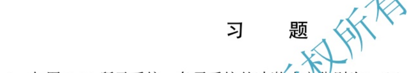
拉普拉斯，1749 年 3 月 23 日生于法国西北部卡尔瓦多斯的博蒙昂诺日，曾任巴黎军事学院数学教



授。1795年任巴黎综合工科学校教授，后又在高等师范学校任教授。1799年还担任过法国经度局局长，并在拿破仑政府中任过6个星期的内政部长。1816年被选为法兰西学院院士，1817年任该院院长。1827年3月5日卒于巴黎。拉普拉斯在研究天体问题的过程中，创造和发展了许多数学的方法，其中以他的名字命名的拉普拉斯变换、拉普拉斯定理和拉普拉斯方程，在科学技术的各个领域有着广泛的应用。

他发表的天文学、数学和物理学的论文有270多篇，专著合计有4006多页。其中最有代表性的专著有《天体力学》、《宇宙体系论》和《概率分析理论》(1812年发表)。

拉普拉斯曾任拿破仑的老师，所以和拿破仑结下不解之缘。拉普拉斯在数学上却是个大师，在政治上是个小人物、墙头草，总是效忠于得势的一边，被人看不起，拿破仑曾讥笑他把无穷小量的精神带到内阁里。在席卷法国的政治变动中，包括拿破仑的兴起和衰落，并没有显著地打断他的工作。尽管他是个曾染指政治的人，但他的威望以及他将数学应用于军事问题的才能保护了他，同时也归功于他显示出的一种并不值得佩服的在政治态度方面见风使舵的能力。



习　　题

2-1　如图2.40所示系统，各子系统的冲激响应分别为$h_1(t)=u(t)$、$h_2(t)=-\delta(t)$和$h_3(t)=\delta(t-1)$，求复合系统的$h(t)$。

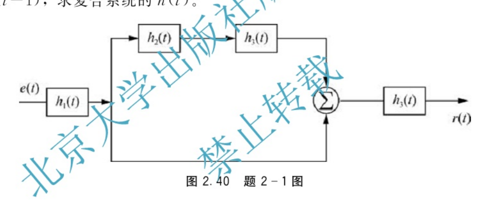


图2.40　题2-1图

2-2　某连续时间LTI系统的单位冲激响应为$h(t)=\dfrac{\sin(\pi t)\sin(2\pi t)}{\pi t^2}$，若输入信号$x(t)=1+\cos 2\pi t+\sin 6\pi t$，试求系统的输出$y(t)$。

2-3　一个因果线性时不变滤波器的系统函数是$H(j\omega)=-2j\omega$，求系统对下列信号$f(t)$的响应$y(t)$。

(1) $f(t)=e^{jt}$；

(2) $f(t)=\sin\omega_0 t u(t)$，求稳态响应$y_{ss}(t)$；

(3) $F(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega(6+j\omega)}$；

(4) $F(j\omega)=\dfrac{1}{2+j\omega}$。

2-4　已知某系统的系统函数$H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+3}$，输入信号$f(t)=\sin t+\cos 3t$，试求系统的响应$y(t)$，并讨论输入信号经过系统传输是否引起失真。

2－5　如图 2.41 所示已知 $L=1\text{H}$，$C=1\text{F}$，为保证无失真传输，试确定电阻 R_1 和 R_2 的数值。

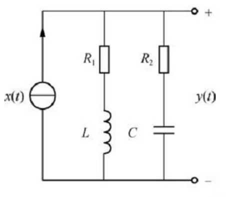


图 2.41　题 2－5 图

2－6　如图 2.42(a)所示的系统，$H(\text{j}\omega)$为理想低通滤波器的系统函数，其幅频特性 $|H(\text{j}\omega)|$ 如图 2.42(b)所示，其相频特性 $\varphi(\omega)=\text{e}^{-\text{j}\omega t_0}$。若 $f(t)=\text{Sa}(t)$，$S(t)=\cos 2t$（$-\infty<t<\infty$），试求输出信号 $y(t)$。

2－7　图 2.43(a)为二次载波振幅调制滤波系统。已知输入信号 $f(t)=\sin t/(\pi t)$，载波信号为 $S(t)=\cos 1000t$，低通滤波器的幅频特性如图 2.43(b)所示，其相位特性 $\varphi(\omega)=0$，试求输出信号 $y(t)$。

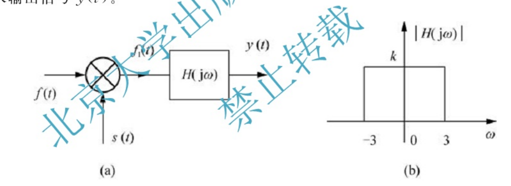
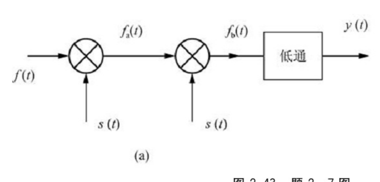


图 2.42　题 2－6 图



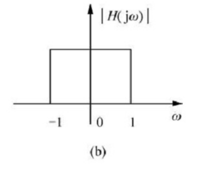


图 2.43　题 2－7 图

2－8　调制和解调的原理如图 2.44(a)、(b)所示。已知调制信号 $f(t)$ 的频谱为 $F(\text{j}\omega)$，如图 2.44(c)所示，载波信号为 $\cos(\omega_0 t)$，$\omega_0 \gg \omega_m$，试画出 $y(t)$ 和 $y_1(t)$ 的频谱图。要获得原调制信号 $f(t)$，在解调过程中低通滤波器的带宽应在什么范围？



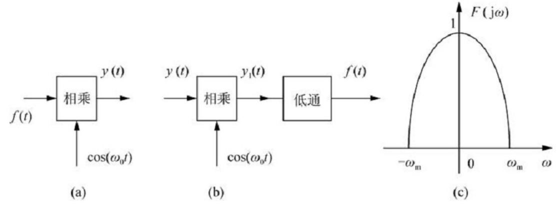


图 2.44　题 2-8 图

2-9　用拉普拉斯变换法求解下列微分方程的零输入响应、零状态响应、全响应。

(1) $y'(t)+2y(t)=x(t)$　$y(0-)=0$，$x(t)=\sin(2t)u(t)$

(2) $y'(t)+2y(t)=x'(t)+x(t)$　$y(0_-)=1$，$x(t)=e^{-t}u(t)$

(3) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)$　$y(0_-)=y'(0_-)=0$，$x(t)=u(t)$

(4) $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=x'(t)$　$y(0_-)=y'(0_-)=1$，$x(t)=e^{-t}u(t)$

2-10　如图 2.45 所示 RLC 系统，$u_s(t)=12\text{V}$，$L=1\text{H}$，$C=1\text{F}$，$R_1=3\Omega$，$R_2=2\Omega$，$R_3=1\Omega$。$t<0$ 时电路已达到稳态，$t=0$ 时开关 s 闭合，求 $t\geqslant 0$ 时电压 $u(t)$的零输入响应、零状态响应、全响应、系统函数。

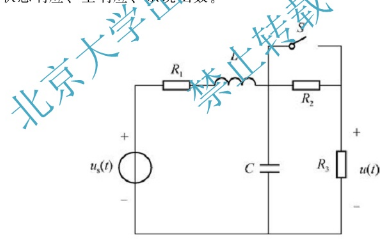


图 2.45　题 2-10 图

2-11　若 $H(s)$零极点分布图如图 2.46 所示。

(1) 对于图 2.46(a)、(b)，若已知 $s=0$ 时，$H(0)=1$，求出系统函数 $H(s)$并粗略画出其幅频特性。

(2) 对于图 2.46(c)、(d)，若已知 $s\to\infty$时，$H(\infty)=1$，求出系统函数 $H(s)$并粗略画出其幅频特性。

2-12　图 2.47 所示反馈系统，$G(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$，当常数 K 满足什么条件时，系统是稳定的？

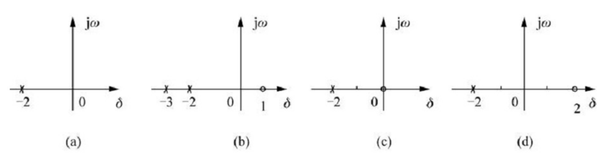


图 2.46　题 2－11 图

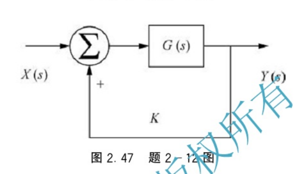


图 2.47　题 2－12 图

2－13　图 2.48 所示反馈系统，其中 $ku(t)$ 是受控源。

(1) 求系统函数 $H(s)$；

(2) K 满足什么条件时，系统是稳定的？

(3) 在临界稳定条件下，求系统的冲激响应 $h(t)$。

图 2.48　题 2－13 图

第3章

离散信号的时域和 z 域分析

本章教学要求

- 熟悉常见的离散时间信号的定义及其时域特性。
- 学会在时域中求解信号的各种运算和变换，包括信号的相加、相乘、数乘、翻转、平移、差分、叠加、卷积和等。
- 理解并掌握 z 变换的定义、收敛域、常见信号的 z 变换及其性质。
- 掌握使用幂级数展开法、部分分式展开法求 z 逆变换的方法。
- 深刻理解 z 变换与拉普拉斯变换之间的关系。
- 理解离散信号的 MATLAB 实现及典型例题的解析。

推荐阅读资料

[1] 刘品潇，马世榜，李建朝．信号与系统[M]．长沙：国防科技大学出版社，2008.

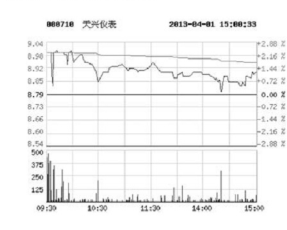
[2] 汤全武，陈晓娟，李德敏．信号与系统[M]．武汉：华中科技大学出版社，2008.

[3] 闫青，付晨．信号与系统[M]．济南：山东科学技术出版社，2008.



引例：股市行情走势图

现实生活中离散信号也是常见的，如股市行情图，它的作用就是把股票市场的交易信息实时地用曲线在坐标图上加以显示的技术图形，如图 3.1 所示，坐标的横轴是开市的时间，纵轴的上半部分是股价或指数，下半部分显示的是成交量。股市行情图是股市现场交易的即时资料。通过分析它可把握股价格的波动，给交易提供依据。



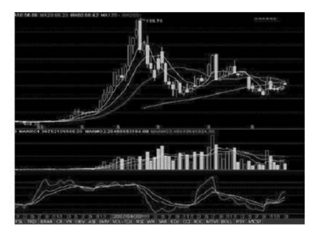


图 3.1 股市行情走势图

3.1　离散信号的时域分析

离散时间信号也称为离散序列，可以用函数解析式表示，也可以用图形表示，还可以用列表表示。

3.1.1　基本离散序列

1. 单边实指数序列

实指数序列是指序列值随序号变化刚好按指数规律变化的离散时间信号，常用的实指数序列为单边实指数序列，而且当 $n<0$ 时，$f(n)=0$，它的定义为

$$f(n)=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}\qquad a\ \text{为实数} \tag{3-1}$$



小知识：

根据实数 a 的取值不同，单边实指数序列分为以下几种不同的情况。

(1) 若 $|a|>1$，则 $f(n)$为一个发散序列，如图 3.2 所示。

(2) 若 $|a|<1$，则 $f(n)$为一个收敛序列，如图 3.2 所示。

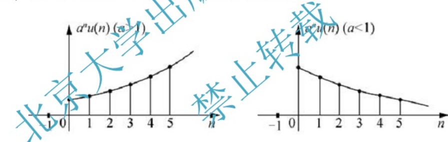


图 3.2　单边指数序列

2. 虚指数序列和正弦序列

虚指数序列和正弦序列分别定义为

$$f(k)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 k}\quad k\in\mathbf{Z}, \tag{3-2}$$



$$f(k)=A\cos(\omega_0 k+\Phi)\quad k\in\mathbf{Z}, \tag{3-3}$$



小知识：

它们不一定是周期序列，是否为周期序列取决于$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$的值。具体情况如下。

(1) 当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为正数时，它们是周期序列，且其周期为 $N_{\mathrm{T}}=\dfrac{2\pi}{\omega_0}$。

(2) 当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为有理数时，它们是周期序列，且其周期为 $N_{\mathrm{T}}=\dfrac{2\pi}{\omega_0}l$，$l$ 为使 $N_{\mathrm{T}}=\dfrac{2\pi}{\omega_0}l$ 为最小整数的自然数。

(3) 当$\dfrac{2\pi}{\omega_0}$为无理数时，它们是非周期序列。

3. 复指数序列

复指数序列定义为

$$f(n)=e^{(\delta+j\omega_0)n} \tag{3-4}$$

式中：ω_0 为数字角频率，单位为幅度。

$f(n)$具有实部和虚部，可以写成

$$e^{(\delta+j\omega_0)n}=e^{\delta n}\cos(\omega_0 n)+je^{\delta n}\sin(\omega_0 n)$$

4. 单位脉冲序列

单位脉冲序列又称单位序列或单位抽样信号，用符号$\delta(n)$表示，且在$n=0$时有确定值1。定义式为

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{3-5}$$

时移为

$$\delta(n-n_0)=\begin{cases}1, & n=n_0\\ 0, & n\neq n_0\end{cases} \tag{3-6}$$

单位脉冲序列和有时移的单位脉冲序列分别如图3.3(a)、(b)所示。

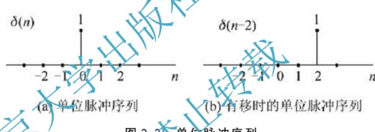


图3.3 单位脉冲序列

单位脉冲序列仅在$n=0$处取单位值，而在其余点均为零值，它在离散系统中的作用类似于连续时间系统中的单位冲击函数$\delta(t)$。它也具有抽样性，即

$$\begin{aligned}f(n)\delta(n)&=f(0)\delta(n)\\ f(n)\delta(n-m)&=f(m)\delta(n-m)\\ f(n)\delta(n+m)&=f(-m)\delta(n+m)\end{aligned} \tag{3-7}$$

任意序列可以利用单位脉冲序列及带时移单位脉冲序列的线性加权和表示，如图3.4所示，离散序列可以表示为

$$f(n)=3\delta(n+1)+\delta(n)+2\delta(n-1)+2\delta(n-2)$$

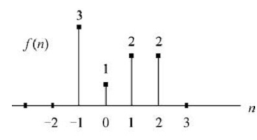


图3.4 离散序列



小提醒：

$\delta(n)$与$\delta(t)$有本质的差别。$\delta(t)$是一个在$t=0$处宽度无穷小、幅度无穷大、面积为1的窄脉冲，这在实际中是无法实现的。而单位序列$\delta(n)$在$n=0$处取有限值1，它在实际工程中是存在的。

5. 单位阶跃序列 $u(n)$

单位阶跃序列用$u(n)$表示，定义为

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{3-8}$$

如图3.5所示。

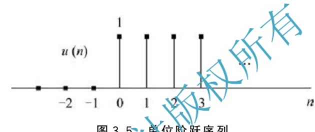


图3.5　单位阶跃序列

单位阶跃序列类似于连续时间信号的单位阶跃函数$u(t)$，它也具有截取特性，即可将一个双边序列截成一个单边序列：

$$f(n)u(n)=\begin{cases}f(n), & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{3-9}$$



小提醒：

$u(t)$与$u(n)$也有本质的区别，其区别在于$u(t)$是一种奇异信号，它在$t=0$处发生跃变；而$u(n)$是一种非奇异信号，它在$n=0$处明确定义为1。

单位脉冲序列与单位阶跃序列的关系如下。

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

6. 矩形序列 $R_N(n)$

矩形序列用$R_N(n)$表示，定义为

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\ n\end{cases} \tag{3-10}$$

矩形序列如图3.6所示。矩形序列与单位阶跃序列的关系如下：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N) \tag{3-11}$$



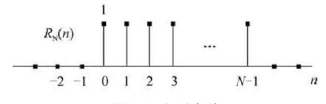


图 3.6 矩形序列

3.1.2 离散时间信号的基本运算

1. 翻转

信号的翻转是指将信号 $f(n)$变化为 $f(-n)$的运算，即将 $f(n)$的波形以纵轴为中心进行 180°翻转，如图 3.7 所示。

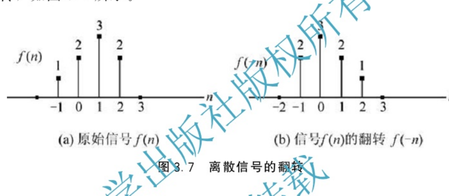


图 3.7 离散信号的翻转

2. 位移

离散信号的位移是指将信号 $f(n)$变化为信号 $f(n\pm m)(m>0)$的运算。若为 $f(n-m)$的波形，则表示将信号 $f(n)$的波形右移 m 单位；若为 $f(n+m)$的波形，则表示将信号 $f(n)$的波形左移 m 单位，如图 3.8 所示。

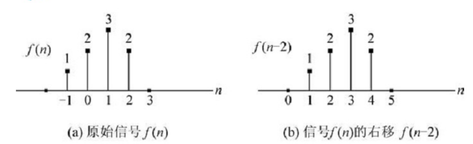


图 3.8 离散信号的位移

3. 相加与相乘

离散信号的相加是指若干离散序列同序号的值之和，可表示为

$$y(n)=y_1(n)+y_2(n)+\cdots+y_k(n) \tag{3-12}$$

图 3.9 所示是离散信号相加的一个例子。

离散信号的相乘是指若干离散序列同序号值的乘积，可表示为

$$y(n)=y_1(n)\cdot y_2(n)\cdot\cdots\cdot y_k(n) \tag{3-13}$$

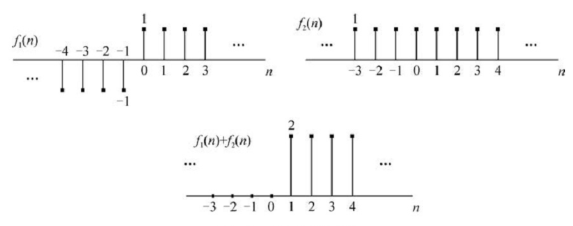


图 3.9 离散信号的相加

图 3.10 所示是离散信号相乘的一个例子。

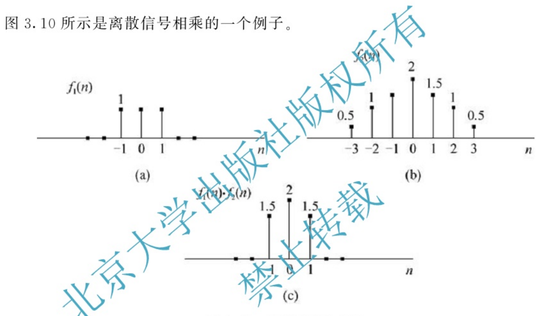


图 3.10 离散信号的相乘

4. *差分*

离散信号的差分与连续信号的微分相对应，可表示为

$$\nabla f(n)=f(n)-f(n-1) \tag{3-14}$$

或

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n) \tag{3-15}$$

式(3－14)称为一阶后向差分，式(3－15)称为一阶前向差分。以此类推，二阶和 n 阶差分为

$$\Delta^2 f(n)=f(n)-2f(n-1)+f(n-2)$$

或

$$\nabla^2 f(n)=f(n+2)-2f(n+1)+f(n)$$

单位脉冲序列 $\delta(n)$ 可用单位阶跃序列 $u(n)$ 的差分表示，即

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1) \tag{3-16}$$

5. *求和(迭分)*

离散信号的求和与连续信号的积分相对应，是对其在 $(-\infty,\ k)$ 区间上求和，可表



示为

$$y(k)=\sum_{n=-\infty}^{k} f(n) \tag{3-17}$$

6. 卷积和运算(线性卷积)

卷积和与连续信号的卷积非常类似，它也是一种重要的数学工具。卷积和也称为线性卷积。

1）定义

设两个离散信号为 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$，定义 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$的卷积和运算为

$$f_1(n)*f_2(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_1(i)f_1(n-i)$$

式中“*”代表卷积和运算。其求和区间的具体如下。

（1）$f_1(n)$为因果信号，$f_2(n)$为任意

$$f_1(n)*f_2(n)=\sum_{k=0}^{\infty} f_1(k)f_2(n-k)$$

（2）$f_2(n)$为因果信号，$f_1(n)$为任意

$$f_1(n)*f_2(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} f_1(k)f_2(n-k)$$

（3）$f_1(n)$、$f_2(n)$同为因果信号

$$f_1(n)*f_2(n)=\sum_{k=0}^{n} f_1(k)f_2(n-k)$$

例 3-1　无限长的序列，设 $f_1(n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$，$f_2(n)=u(n)$，求 $f(n)=f_1(n)*f_2(n)$。

解　$f_1(n)$、$f_2(n)$同为因果信号时，

$$f_1(n)*f_2(n)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k u(k)u(n-k)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k u(k)u(n-k)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

由等比数列公式得到

$$f(n)=f_1(n)*f_2(n)=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]u(n)$$

2）卷积和的图解机理

计算卷积和也可以使用图解法，其运算过程与卷积积分相似，只是积分运算变成了求和运算。现说明利用图解法求两个离散序列 $f_1(n)$和 $f_2(n)$卷积和的计算步骤。

（1）换元：将 $f_1(n)$和 $f_2(n)$中的变量 n 变为 i，并分别画出 $f_1(i)$和 $f_2(i)$的图形。

（2）折叠：画出 $f_2(i)$相对于纵轴的镜像 $f_2(-i)$。

（3）移位：将 $f_2(-i)$的图形沿横轴平移 n，得到 $f_2(n-i)$的图形。当 $n>0$ 时，序列右移；当 $n<0$ 时，序列左移。

（4）相乘：将移位后的 $f_2(n-i)$和 $f_1(i)$相乘。

（5）求和：把 $f_2(n-i)$ 和 $f_1(i)$ 相乘所得到的序列相加，即得到 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的卷积和。

例 3－2 已知两个序列

$$f_1(n)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$
$$\uparrow$$
$$f_2(n)=\{2,\ 3,\ 1\}$$
$$\uparrow$$

试求 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 的卷积和 $f_1(n)*f_2(n)$。

解 将 $f_1(n)$ 和 $f_2(n)$ 中的变量 n 变为 i，并将 $f_2(i)$ 折叠得到 $f_2(-i)$，$f_1(i)$ 和 $f_2(-i)$ 的波形如图 3.11(a)、(b)所示。

当 $n<0$ 时，$f_1(i)$ 和 $f_2(n-i)$ 无重叠区域，故

$$y(n)=f_1(n)*f_2(n)=0$$

当 $n=0$ 时，有

$$y(0)=f_1(0)*f_2(0)=1\times 2=2$$

当 $n=1$ 时，得到 $f_2(1-i)$ 的波形如图 3.11(c)所示，有

$$y(1)=\sum_{i=0}^{1} f_1(i)*f_2(1-i)=1\times 3+2\times 2=7$$

当 $n=2$ 时，得到 $f_2(2-i)$ 的波形如图 3.11(d)所示，有

$$y(2)=\sum_{i=0}^{2} f_1(i)*f_2(2-i)=1\times 1+2\times 3+3\times 2=13$$

当 $n=3$ 时，得到 $f_2(3-i)$ 的波形如图 3.11(e)所示，有

$$y(3)=\sum_{i=0}^{3} f_1(i)*f_2(3-i)=2\times 1+3\times 3+4\times 2=19$$

当 $n=4$ 时，得到 $f_2(4-i)$ 的波形如图 3.11(f)所示，有

$$y(4)=\sum_{i=0}^{4} f_1(i)*f_2(4-i)=3\times 1+4\times 3=15$$

当 $n=5$ 时，得到 $f_2(5-i)$ 的波形如图 3.11(g)所示，有

$$y(5)=\sum_{i=0}^{5} f_1(i)*f_2(5-i)=4\times 1=4$$

当 $n\geqslant 6$ 时，$f_1(i)$ 和 $f_2(n-i)$ 无重叠区域，故

$$y(n)=f_1(n)*f_2(n)=0$$

于是得到

$$y(n)=f_1(n)*f_2(n)=\{2,\ 7,\ 13,\ 19,\ 15,\ 4\}$$
$$\uparrow$$

该例子说明：卷积和中主要运算是翻转、移位、相乘和相加，所以卷积和也称为线性卷积。若设两个序列的长度分别为 N 和 M，则卷积和后的序列长度为 $(N+M-1)$。

卷积和也可以通过竖乘法来计算。这种方法不需要画出序列图形，只需要将两个序列排成两行，按普通的乘法运算进行相乘，但中间结果不进位，最后将同一列的中间结果进行相加得到卷积和序列。但这样只是确定了序列值，其序列号的确定是将相乘的两个序列值的序号之和等于卷积和的序列号的性质。



(a)　(b)

(c)　(d)

(e)　(f)

(g)　(h)

图 3.11　例 3-2 波形

例 3-3　$f_1(n)=\{1,\ 3,\ 2,\ 4\}\ n\geqslant 0$，$f_2(n)=\{2,\ 1,\ 3\}\ n\geqslant 0$，求 $f(n)=f_1(n)*f_2(n)$。

			$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$
			1	3	2	4
				$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$
			×	2	1	3
			3	9	6	12
		1	3	2	4	
+	2	9	6	8		
	2	10	12	19	10	12
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$

$$f(n)=f_1(n)*f_2(n)=\{2,10,12,19,10,12\}$$

3）卷积和的性质

性质与卷积积分相似。

（1）交换律： $$f_1(n)*f_2(n)=f_2(n)*f_1(n) \tag{3-18}$$

（2）分配律： $$f_1(n)*[f_2(n)+f_3(n)]=f_1(n)*f_2(n)+f_1(n)*f_3(n) \tag{3-19}$$

（3）结合律： $$f_1(n)*f_2(n)*f_3(n)=f_1(n)*\{f_2(n)*f_3(n)\} \tag{3-20}$$

（4）序列与$\delta(n)$的卷积：

$$f(n)*\delta(n)=f(n) \tag{3-21}$$

$$f(n)*\delta(n-m)=f(n-m) \tag{3-22}$$

（5）时移性：

如果 $f(n)=f_1(n)*f_2(n)$

则

$$f(n-m)=f_1(n-m)*f_2(n)=f_1(n)*f_2(n-m) \tag{3-23}$$

$$f(n-m+N)=f_1(n-m)*f_2(n+N) \tag{3-24}$$

（6）序列与$u(n)$的卷积 $$f(n)*u(n)=\sum_{i=-\infty}^{n}f(i)\text{（由定义即可证明）} \tag{3-25}$$

3.2 离散信号的 z 域分析

z 变换是与连续系统的拉普拉斯变换相对应的一种变换域分析方法，它对于分析线性时不变离散系统是一种强有力的数学工具。z 变换和拉普拉斯变换之间存在密切的关系，它们的性质也有相似之处，同时两者之间也存在着一些重要的差异。

3.2.1 z 变换的定义及收敛域

1. z 变换的定义

由前面的讲解可知，对连续信号进行均匀采样，可得到离散时间信号。设有连续时间信号 $f(t)$，每隔时间 t，可得到采样信号 $f_s(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)$，对它进行双边 s 变换

$$\begin{aligned}F_s(s)&=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\mathrm{e}^{-snT}\end{aligned}$$

令 $\mathrm{e}^{sT}=z$，其中 z 为一个复变量，它所在的平面称为 z 平面。则

$$F_s(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\mathrm{e}^{-snT}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)z^{-n}$$



将 $f(nT)$ 用 $f(n)$ 表示，且令 $F_s(s)=F(z)$，得到

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}$$

也可以直接定义 z 变换

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n} \tag{3-26}$$

式(3-26)称为双边 z 变换，对 n 求和是在 $\pm\infty$ 之间。还有一种称为单边 z 变换，其定义为

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n} \tag{3-27}$$

本书主要讨论单边 z 变换。

2. z 变换的收敛域

无论是按式(3-26)定义的双边 z 变换，还是按式(3-27)定义的单边 z 变换都是将序列 $f(n)$ 展开为复变量 z^{-1} 的无穷幂级数，其系数就是相应的 $f(n)$ 值。只有该级数收敛时，z 变换才有意义，所以有一个 z 变换收敛域的问题。

对于任意给定的序列 $f(n)$，使其 z 变换存在的所有 z 值的集合，称为序列 z 变换的收敛域。按照级数收敛的理论 z，变换收敛的充分必要条件为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f(n)z^{-n}|<\infty \tag{3-28}$$

不同形式的序列其收敛域形式不同，下面分别讨论几种序列的收敛域。

1) 有限长序列

序列 $f(n)$ 在有限区间内($n_1\leqslant n\leqslant n_2$)具有非零的有限值的序列，由于是有限项求和，其 z 变换 $F(z)$ 除 $z=0$ 和 $z=\infty$ 是否收敛与 n_1、n_2 的取值情况有关外，在整个 z 平面均收敛。具体分 3 种情况：如果 $n_2\leqslant 0$，收敛域不包含 ∞，即 $0\leqslant|z|<\infty$；如果 $n_1\geqslant 0$，收敛域不包含 0，即 $0<|z|\leqslant\infty$；如果 $n_1<0$，$n_2>0$，收敛域不包含 0 和 ∞，即 $0<|z|<\infty$。

例 3-4　求 $f(n)=R_N(n)$ 的 z 变换及其收敛域。

解　由于 $F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$，这是一个因果有限长序列，收敛域为 $0<|z|\leqslant\infty$。由结果知，$z=1$ 为 $F(z)$ 的极点，同时也是零点，零极点互相抵消，所以 $F(z)$ 在单位圆上仍存在。

2) 右边序列(因果序列)

序列 $f(n)$ 只在 $n\geqslant 0$ 区间内有非零的有限值的序列，其 z 变换 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$，它是 z 的负幂级数，存在一个收敛半径 R_{x-}，即收敛域为 $R_{x-}<|z|\leqslant\infty$，也就是半径为 R_{x-} 的圆外，如图 3.12 所示。

例 3-5 求 $f(n)=a^n u(n)$的 z 变换及其收敛域。

解 其 z 变换为

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

在收敛域中必须满足$|az^{-1}|<1$，因此收敛域为$|z|>|a|$，如图 3.13 所示。

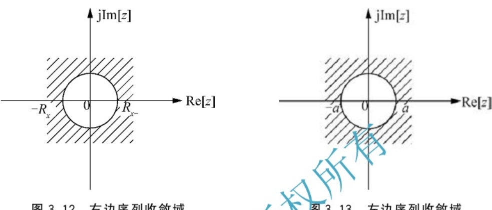


图 3.12 右边序列收敛域　　图 3.13 左边序列收敛域

3) 左边序列(反因果序列)

序列 $f(n)$只在 $n<0$ 区间内有非零的有限值的序列，其 z 变换 $F(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} f(n)z^{-n}$，它是 z 的正幂级数，存在一个收敛半径 R_{x+}，即收敛域为 $0\leqslant|z|<R_{x+}$，也就是半径为 R_{x+}的圆内，如图 3.14 所示。

例 3-6 求 $f(n)=-a^n u(-n-1)$的 z 变换及其收敛域。

解 其 z 变换为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} f(n)z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(az^{-1})^n=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{z}{z-a}$$

在收敛域中必须满足$|az^{-1}|>1$，因此收敛域为$|z|<|a|$，如图 3.15 所示。

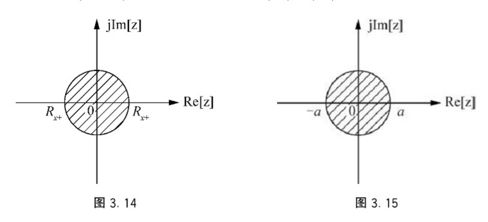


图 3.14　　图 3.15

4) 双边序列

序列 $f(n)$在 $-\infty\leqslant n\leqslant\infty$ 区间内有非零的有限值的序列，其 z 变换 $F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1} f(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$，它是左边与右边序列之和，因此其收敛域为

左边序列与右边序列收敛的重叠部分，即收敛域为 $R_{x-}<|z|<R_{x+}$，且 $R_{x-}<R_{x+}$，也就是一个圆环，如图 3.16 所示。

例 3-7　求 $f(n)=a^{|n|}$(a 为实数)的 z 变换及其收敛域。

解　其 z 变换为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(a^{-1}z^{-1})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(az)^n+\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

第一部分收敛域为 $|az|>1$，得到 $|z|>|a^{-1}|$，第二部分收敛域为 $|az^{-1}|>1$，得到 $|z|<|a|$。如果 $|a|\geqslant 1$，则无公共收敛域，因此 $F(z)$不存在。当如果 $0<|a|<1$，收敛域为 $|a|<|z|<|a^{-1}|$，其 $F(z)=\dfrac{az}{1-az}+\dfrac{1}{1-az^{-1}}$，如图 3.17 所示。

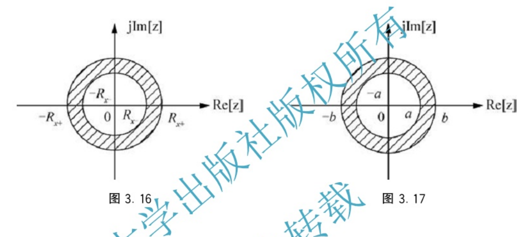


图 3.16　　　　图 3.17

3.2.2　典型信号的 z 变换

1. 单位取样序列 $\delta(n)$

其 z 变换为 $F(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$

所以有
$$\delta(n)\leftrightarrow 1 \tag{3-29}$$

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

其 z 变换为 $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\dfrac{z}{z-1}$

所以有
$$u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-1} \tag{3-30}$$

3. 单边指数序列 $a^nu(n)$

其 z 变换为 $F(z)=[a^nu(n)]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{a}{z}\right)^n=\dfrac{z}{z-a}$

所以有
$$a^nu(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a} \tag{3-31}$$

常用离散序列的 z 变换对见表 3-1。

表 3-1　常用离散序列的 z 变换对

序号	$f(n)(n>0)$	$F(z)=z[f(n)]$	收敛域
1	$\delta(n)$	1	整个 z 平面
2	$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$
3	$a^n(n)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
4	$a^{n-1}u(n-1)$	$\frac{1}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
5	$\sin\Omega n\cdot u(n)$	$\frac{z\sin\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	$\|z\|>1$
6	$\cos\Omega n\cdot u(n)$	$\frac{z(z-\cos\Omega)}{z^2-2z\cos\Omega+1}$	$\|z\|>1$
7	$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$
8	$-a^nu(-n-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$

3.2.3　z 变换的性质

1. 线性特性

若 $f_1(n)\leftrightarrow F_1(z)$，$f_2(n)\leftrightarrow F_2(z)$，且 a_1、a_2 为常数，则

$$a_1f_1(n)+a_2f_2(n)\leftrightarrow a_1F_1(z)+a_2F_2(z) \tag{3-32}$$

该性质是 z 域分析的基础，其收敛域为两个函数收敛域的公共部分。

例 3-8　求序列 $\cos(\omega_0 n)u(n)$ 和 $\sin(\omega_0 n)u(n)$ 的 z 变换。

解　$\cos(\omega_0 n)u(n)=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})u(n)$

$$\because e^{j\omega_0 n}u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}\quad |z|>1$$

$$e^{-j\omega_0 n}u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\quad |z|>1$$

$$\cos(\omega_0 n)u(n)\leftrightarrow\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\quad |z|>1$$

同理：$\sin(\omega_0 n)u(n)\leftrightarrow\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\quad |z|>1$

2. 移位特性

若 $f(n)u(n)\leftrightarrow F(z)$，则

$$f(n-m)u(n)\leftrightarrow z^{-m}F(z)+z^{-m}\sum_{n=-m}^{-1}f(n)z^{-n} \tag{3-33}$$

$$f(n+m)u(n)\leftrightarrow z^{m}F(z)-z^{m}\sum_{n=0}^{m-1}f(n)z^{-n} \tag{3-34}$$



若 $f(n)$ 为因果序列，则有

$$f(n-m)u(n) \leftrightarrow z^{-m}F(z) \tag{3-35}$$

同时有

$$f(n-m)u(n-m) \leftrightarrow z^{-m}F(z) \tag{3-36}$$

证明　若 $f(n)u(n) \leftrightarrow F(z)$

则 $Z[f(n-m)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n-m)z^{-n} = z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} f(n-m)z^{-(n-m)}$

令 $k=n-m$，有

$$Z[f(n-m)u(n)] = z^{-m}\sum_{k=-m}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^{-m}\sum_{n=-m}^{-1} f(n)z^{-n} + z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$$

$$= z^{-m}\sum_{n=-m}^{-1} f(n)z^{-n} + z^{-m}F(z)$$


小提醒：

$f(n-m)u(n-m) \neq f(n-m)$

证明　∵ $f(n-m)$ 的 z 变换等于 $f(n-m)u(n)$ 的 z 变换

$f(n+m)$ 的 z 变换等于 $f(n+m)u(n)$ 的 z 变换

∴ 当且仅当 $f(n)$ 为因果信号时 $f(n-m)u(n-m) = f(n-m)$

例 3-9　求矩形序列 $G_N(n)$ 的 z 变换。

解　$G_N(n) = u(n) - u(n-N)$

经 z 变换得到

$$Z[G_N(n)] = Z[u(n)] - Z[u(n-N)]$$

$$= \frac{z}{z-1} - z^{-N}\frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1}(1-z^{-N})$$

$$= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z^N-1}{z^N}$$

例 3-10　求周期为 N 的单边周期性单位序列的 z 变换。

解

$$\delta_N(n)u(n) = \delta(n) + \delta(n-N) + \cdots + \delta(n-mN) + \cdots$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-mN)$$

由于

$$\delta(n) \leftrightarrow 1$$

$$Z[\delta(n-N)] = z^{-N}$$

$$Z[\delta_N(n)u(n)] = Z[\delta(n) + \delta(n-N) + \delta(n-2N) + \cdots + \delta(n-mN) + \cdots]$$

$$= 1 + z^{-N} + z^{-2N} + \cdots + z^{-mN} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-N}}$$

3. 尺度变换

若 $f(n) \leftrightarrow F(z)$，则对于非零实常数，有

$$a^n f(n) \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right) \tag{3-37}$$

当 $a=-1$ 时，$(-1)^n f(n)\leftrightarrow\frac{z}{z+1}\quad |z|>1$

证明　$Z[a^n f(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}a^n f(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$

$$a^n f(n)\leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right)$$

4. 时间翻转性质

若 $f(n)\leftrightarrow F(z)$，则

$$f(-n)\leftrightarrow F(z^{-1})\tag{3-38}$$

证明　$\because F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}$

$$Z[f(-n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\ (z^{-1})^{-n}$$

例 3-11　求 $a^{|n|}$ 的 z 变换。($|a|<1$)

解　因为 $a^{|n|}=a^{-n}u(-n-1)+a^n u(n)$

而
$$a^n u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-a}$$

利用对称性
$$a^{-n}u(-n)\leftrightarrow\frac{z^{-1}}{(z^{-1}-a)}$$

利用时移性
$$a^{-n-1}u(-n-1)\leftrightarrow\frac{1}{(z^{-1}-a)}$$

则
$$a^{-n}u(-n-1)\leftrightarrow\frac{a}{(z^{-1}-a)}$$

$$a^{|n|}\leftrightarrow\frac{z}{z-a}+\frac{a}{z^{-1}-a}=\frac{\left(a-\frac{1}{a}\right)z}{z^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)z+1}$$

5. z 域微分(时域线性加权)

若 $f(n)\leftrightarrow F(z)$，则

$$nf(n)\leftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)\tag{3-39}$$

证明　因为 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$

两边对 z 求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}f(n)z^{-n}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}nf(n)z^{-n-1}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}nf(n)z^{-n}$$

所以

$$nf(n)\leftrightarrow -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)$$

例 3-12　求 $nu(n)$的 z 变换

解

$$u(n)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$$

$$nu(n)\leftrightarrow\frac{z}{(z-1)^2}$$

6. 卷积定理——时域卷积定理

若 $f_1(n)\leftrightarrow F_1(z)$，$f_2(n)\leftrightarrow F_2(z)$则

$$f_1(n)*f_2(n)\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z) \tag{3-40}$$

证明　因为

$$\begin{aligned}Z[f_1(n)*f_2(n)]&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[f_1(n)*f_2(n)]z^{-n}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)f_2(n-m)z^{-n}\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_2(n-m)z^{-(n-m)}z^{-m}\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1(m)\cdot z^{-m}F_2(z)\\&=F_1(z)\cdot F_2(z)\end{aligned}$$

所以

$$f_1(n)*f_2(n)\leftrightarrow F_1(z)\cdot F_2(z)$$

例 3-13　计算卷积 $u(n)*u(n)$

解　$\because u(n)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-1}$

由卷积定理可得

$$u(n)*u(n)\leftrightarrow\left(\frac{z}{z-1}\right)^2=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}$$

$$u(n)*u(n)=Z^{-1}\left[\left(\frac{z}{z-1}\right)^2\right]=Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2}\right]+Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]$$

$$u(n)*u(n)=(n+1)u(n)$$

7. 初值定理与终值定理

如 $f(n)$为因果序列，$f(n)\leftrightarrow F(z)$

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z) \tag{3-41}$$

$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z) \tag{3-42}$$

证明　因为 $F(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}=f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+\cdots$

当 $z\to\infty$，上式除第一项外全为 0

$\therefore f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z)$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)=f(0)+\lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]z^{-n}$$
$$=f(0)+[f(1)-f(0)]+[f(2)-f(1)]+\cdots$$
$$=f(0)-f(0)+f(\infty)$$
$$=f(\infty)$$

例 3-14 $F(z)=\dfrac{z}{z+1}$，求初值 $f(0)$ 与终值 $f(\infty)$。

$$f(0)=\lim_{z\to\infty}F(z)=1$$
$$f(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)\text{(终值不存在)}$$



思考：

初值定理与终值定理的条件是什么？

3.2.4 逆 z 变换

逆 z 变换就是已知 $F(z)$，求 $f(n)$。下面介绍 2 种求解逆 z 变换的方法。

1. 幂级数展开法

理论基础为

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)z^{-n}=\cdots+f(-1)z+f(0)+f(1)z^{-1}+\cdots$$

各系数为所求序列值。如何求？可用长除法。

例 3-15 已知 $f(n)\leftrightarrow F(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1}$，求 $f(n)$。

解 有条件可知为因果序列(右边序列)，而且长除法可按 z 的降幂排列。

$$\begin{array}{r l}
 & 1+z^{-2}+z^{-4}+z^{-6}\cdots \\
z^2-1 \big) & z^2 \\
 & \underline{z^2-1} \\
 & 1 \\
 & \underline{1-z^{-2}} \\
 & z^{-2} \\
 & \underline{z^{-2}-z^{-4}} \\
 & z^{-4} \\
 & \underline{z^{-4}-z^{-6}} \\
 & \vdots
\end{array}$$

$$F(z)=1+z^{-2}+z^{-4}+z^{-6}+\cdots$$

即 $f(n)=1$，其中 n 为正偶数。



例 3-16　已知 $f(n)\leftrightarrow F(z)=\dfrac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$，$|z|<1$，求 $f(n)$。

解　有条件可知为左边序列，而且长除法可按 z 的升幂排列。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2z+5z^2+\cdots \\
\hline
2^{-2}+2z^{-1}-1 & 2z^{-1}+1 \\
 & 2z^{-1}-4 \\
\cline{2-2}
 & 5-2z \\
 & 5-10z+5z^2 \\
\cline{2-2}
 & 8z+5z^2
\end{array}
$$

$$F(z)=2z+5z^2+8z^3+\cdots$$

所以　$f(-1)=2$，$f(-2)=5$，$f(-3)=8$，…

即　$f(n)=-(3n+1)u(-n-1)$

2. 部分分式展开法

（1）理论基础：$a^n u(n)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$

（2）步骤：$\dfrac{F(z)}{z}$为假分式时，可分解为有理多项式和真分式，而有理多项式的逆变换为 $c_i\delta(k+i)$。

① 当$\dfrac{F(z)}{z}$为真分式时，进行部分分式展开；

② 展开式两边同乘 z，得到$\dfrac{z}{z-a}$的基本形式；

③ 根据收敛域求 z 反变换。

例 3-17　已知 $f(n)$的 z 变换为$F(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$，$|z|>1$，求 $f(n)$。

解　$\dfrac{F(z)}{z}$进行部分分式展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{A_1}{z-1}+\frac{A_2}{z-0.5}=\frac{2}{z-1}+\frac{-1}{z-0.5}$$

$$F(z)=\frac{2z}{z-1}+\frac{-z}{z-0.5}$$

$$f(n)=[2-(0.5)^n]u(n)$$

例 3-18　已知 $f(n)$的 z 变换为$F(z)=\dfrac{z^3+2z^2+1}{z(z-1)(z-0.5)}$，$|z|>1$，求 $f(n)$。

解　$\dfrac{F(z)}{z}$进行部分分式展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^3+2z^2+1}{z^2(z-1)(z-0.5)}=\frac{2}{z^2}+\frac{6}{z}+\frac{8}{z-1}-\frac{13}{z-0.5}$$

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{2}{z}+6+\frac{8z}{z-1}-\frac{13z}{z-0.5}$$

$$f(n)=2\delta(n-1)+\delta(n)+[8-13(0.5)^n]u(n)$$

3.2.5 z 变换与拉普拉斯变换之间的关系

由前面讲解可知，复变量 z 和 s 的关系为

$$z=e^{sT}=re^{j\theta}$$

$$s=\frac{1}{T}\ln z=\sigma+j\omega$$

式中 T 为采样间隔。且有

$$r=e^{\sigma T}$$

$$\theta=\omega T$$



小知识：

上式表明 $s-z$ 平面有如下关系，如图 3.18 所示。

(1) s 平面上的虚轴 ($\sigma=0$，$s=j\omega$) 映射到 z 平面是单位圆，即 $|z|=1$；s 右半平面上的虚轴 ($\sigma>0$) 映射到 z 平面是单位圆外的区域，即 $|z|>1$；s 左半平面上的虚轴 ($\sigma<0$) 映射到 z 平面是单位圆内的区域，即 $|z|<1$。

(2) s 平面上的实轴 ($\omega=0$，$s=\sigma$) 映射到 z 平面是正实轴；平行于实轴的直线 (ω 为常数) 映射到 z 平面是始于原点的辐射线；通过 $j\frac{k\omega_s}{2}$ ($k=\pm1, \pm3, \cdots$) 而平行于实轴的直线映射到 z 平面是负实轴。

(3) 由于 $e^{j\theta}$ 是以 ω_s 为周期的周期函数，因此在 s 平面上沿虚轴移动相对于 z 平面沿单位圆周期性旋转，每平移 ω_s，则沿着单位圆转一周，所以 $s-z$ 平面并不是单值的。

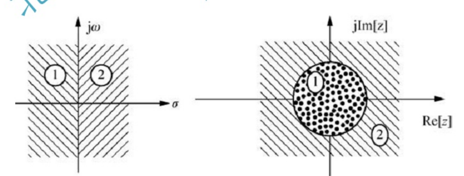


图 3.18 $s-z$ 平面关系图

3.3 基于 MATLAB 语言的离散信号分析

1. MATLAB 在离散信号时域分析中的应用

利用 MATLAB 程序可以产生离散时间信号，实现离散信号的运算。

例 3-19 用 MATLAB 实现单位斜坡信号 $x(n)=n$，$n\in[2, 10]$。

解　其程序如下：

```
n=2:10;
x=n;
stem(n,x,'fill');
xlabel('n');
ylabel('x(n)');
title('Ramp sequence');
grid;
```

运行结果图如图 3.19 所示。

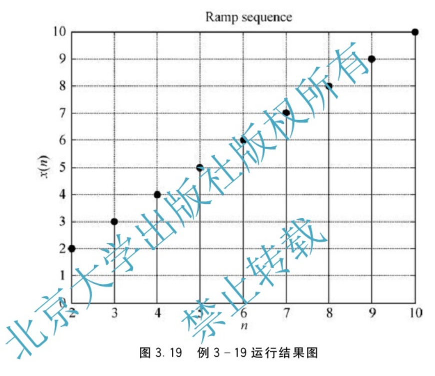


图 3.19　例 3-19 运行结果图

例 3-20　用 MATLAB 画出正弦序列 $x_1(n)=\cos(n\pi/8)$，$x_2(n)=\cos(2n)$的时域波形图，并观察它们的周期性。

解　其程序如下：

```
n=0:40;
subplot(2,1,1);
stem(n,cos(n*pi/8),'fill');
title('cos(n*pi/8)');
subplot(2,1,2);
stem(n,cos(2*n),'fill');
title('cos(2*n)');
```

运行结果图如图 3.20 所示。

由图 3.20 可知，$x_1(n)=\cos(n\pi/8)$为周期序列，$x_2(n)=\cos(2n)$为非周期序列。

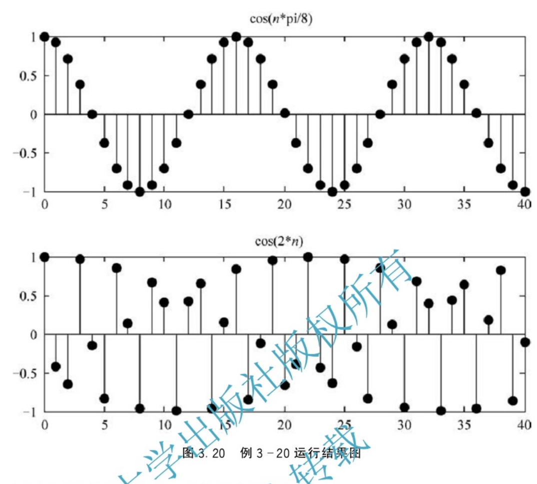


图 3.20　例 3－20 运行结果图

2. MATLAB 在离散信号 z 域分析中的应用

在 MATLAB 中，利用留数法求解逆变换可以通过 residue()函数来实现。

例 3－21　计算 $X(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-0.6)}$的逆 z 变换，其收敛域为$|z|>1$。

解　其程序如下：

```
clear;
b=1;
a=[1-1.6 0.6];
[R,P,K]=residue(b,a);
```

运行结果为：

```
R=
  2.5000
  - 2.5000
P=
  1.0000
  0.6000
K=
  []
```



因此得到 $X(z)=\frac{2.5z}{z-1}-\frac{1.5z}{z-0.6}$

相应的逆 z 变换为 $x(n)=[2.5-1.5\,(0.6)^n]u(n)$

本章小结

1. 离散信号的时域分析

包括了单边实指数序列、正弦序列、复指数序列、单位脉冲序列、单位阶跃序列、矩形序列的定义及特性，离散信号的翻转、平移、差分、迭分、相加、相乘运算，卷积和的定义、图解机理和性质等。

2. 离散信号的 z 域分析

包括了 z 变换的定义与收敛域，典型信号的 z 变换，z 变换的性质，幂级数展开法和部分分式展开法求解 z 逆变换，z 变换与拉普拉斯变换之间的关系。

3. 基于 MATLAB 语言的离散信号分析

MATLAB 在离散信号时域、z 域中的应用及典型例题解析。



留数法求 z 逆变换

通过前面的讲解知道了 z 逆变换的幂级数展开法和部分分数展开法，这里介绍留数法。如果 $X(z)$ 具有有限个极点，则采用复变函数理论中留数定理进行计算。

设 $\{a_m\}$ 与 $\{b_m\}$ 分别是 $X(z)z^{-1}$ 在 z 平面围线 C 内部与外部的两组极点，则

$$x(n)=\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},\ a_m] \tag{3-43}$$

或

$$x(n)=-\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},\ b_m] \tag{3-44}$$

式中，Res 表示极点留数。

在利用留数定理求 z 逆变换时，首先要根据 $X(z)$ 的收敛域确定序列 $x(n)$ 的形式，也就是要确定 $x(n)$ 是因果、反因果还是双边序列。然后根据极点的位置选择公式求得序列 $x(n)$，如果序列是因果序列，选择式(3-43)，求得序列 $x(n)$；如果序列是反因果序列，选择式(3-44)，求得序列 $x(n)$。

习　　题

3-1 给定如下序列：

$$x(n)=\begin{cases}2n+5, & -4\leqslant n\leqslant -1\\ 6, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 画出 $x(n)$ 序列的波形，标上各序列值。

(2) 利用 $u(n)$ 和 $\delta(n)$ 来表示 $x(n)$ 序列。

(3) 令 $x_1(n)=2x(n-1)$，试画出 $x_1(n)$ 的波形。

(4) 令 $x_2(n)=2x(1-n)$，试画出 $x_2(n)$ 的波形。

3-2 判断下列序列是否为周期序列，若是周期序列，求出周期。

(1) $x(n)=5\sin(\frac{2}{5}\pi n+\frac{\pi}{4})$　　(2) $x(n)=e^{j(\frac{n}{2}-\pi)}$

3-3 求下列信号的卷积。

(1) $R_4(n)*R_5(n)$　　(2) $2^n u(n)*2^n u(n)$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)*u(n)$　　(4) $2^n u(n)*3^n u(n)$

3-4 求以下序列的 z 变换，并画出零极点图和收敛域。

(1) $x(n)=a^{|n|}$　　(2) $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

(3) $x(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$　　(4) $x(n)=\frac{1}{n}$

(5) $x(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)u(n)$　　(6) $x(n)=\sin\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)u(n)$

3-5 求下列 $X(z)$ 的反变换。

(1) $X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$，$|z|>\frac{1}{2}$　　(2) $X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$，$|z|<\frac{1}{2}$

(3) $X(z)=\frac{1}{z+1}$，$|z|>1$　　(4) $X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$，$|z|>\frac{1}{2}$

(5) $X(z)=\frac{z(z-1)}{(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$，$\frac{1}{3}<|z|<1$　　(6) $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z^2-1)}$，$|z|>1$

3-6 已知某系统函数 $X(z)=\frac{z}{(z-0.5)(z+2)}$，求此系统函数在下列条件下的单位冲激响应 $h(n)$ 和收敛域，并判断系统是否稳定。

(1) $h(n)$ 是因果序列。

(2) $h(n)$ 是逆因果序列。

(3) $h(n)$ 是双边序列。

第4章

离散系统的时域和 z 域分析

本章教学要求

- 初步学会已知框图建立系统的数学模型——差分方程。
- 会利用递推法和卷积法求解系统的响应。
- 熟练应用 z 变换法求解系统的三大响应。
- 深刻理解 z 域系统函数的定义，会用多种方法求解系统函数。
- 深刻理解离散系统频率特性的定义、物理意义和几何求解方法。
- 理解离散系统的 MATLAB 实现及典型例题的解析。

推荐阅读资料

[1] 刘品潇，马世榜，李建新．信号与系统[M]．长沙：国防科技大学出版社，2008.

[2] 汤全武，陈晓娟，李德敏．信号与系统[M]．武汉：华中科技大学出版社，2008.

[3] 闫青，付晨．信号与系统[M]．济南：山东科学技术出版社，2008.

引例：智能交通系统

交通安全、交通堵塞及环境污染是困扰当今国际交通领域的三大难题，尤其以交通安全问题最为严重。据专家研究，采用智能交通技术提高道路管理水平后，每年仅交通事故死亡人数就可减少30%以上，并能提高交通工具的使用效率50%以上。为此，世界各发达国家竞相投入大量资金和人力，进行大规模的智能交通技术研究试验。而智能交通系统(ITS)，就是指将先进的信息技术、数据通信传输技术、电子控制技术、计算机处理技术等应用于交通运输行业从而形成的一种信息化、智能化、社会化的新型运输系统，它使交通基础设施能发挥最大效能。该技术于上世纪80年代起源于美国，随后各国都积极寻求在该领域中的发展。图4.1为某一智能交通系统的硬件设备图和抓拍的图片。

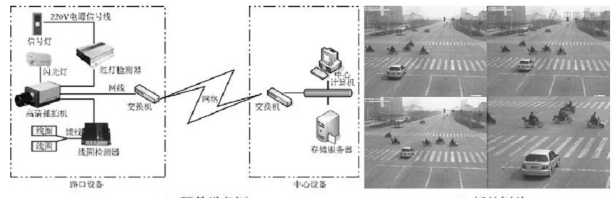
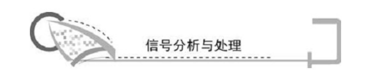


图 4.1 智能交通系统



4.1 离散时间系统及其数学模型

用于传输和处理离散时间信号的系统称为离散时间系统，简称离散系统。其作用是将输入序列 $x(n)$ 转变为输出序列 $y(n)$，输入、输出序列和离散系统的相互关系如图 4.2 所示，即离散系统的功能是完成激励信号 $x(n)$ 转变为响应信号 $y(n)$ 的运算，记作 $y(n)=T[f(n)]$ 或 $f(n)\rightarrow y(n)$。

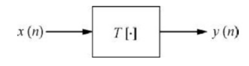


图 4.2 离散时间系统

数字计算机、数字通信系统和数字控制系统的主要部分均属于离散系统。

4.1.1 离散时间系统的性质

1. 线性性质

如果 $f_1(n)\rightarrow y_1(n)$，$f_2(n)\rightarrow y_2(n)$

则 $\{af_1(n),\ bf_2(n)\}\rightarrow\{ay_1(n),\ by_2(n)\}$

2. 时不变性质

如果 $f(n)\rightarrow y(n)$，则对任意常数 n_d 有

$$f(n-n_d)\rightarrow y(n-n_d)$$

满足这两个性质的系统称为 LTI 离散系统。

4.1.2 离散时间系统的描述

对离散时间系统的描述主要有数学模型、系统框图、信号流图。离散时间系统的数学模型常用差分方程来描述。

1. 差分与差分方程

1）差分运算(对应于连续信号的微分运算)

概念：相邻两个序列值的变化率就是这两个序列之差，故称为差分运算。

分类：一阶向前差分为 $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$

一阶向后差分为 $\nabla f(n)=f(n)-f(n-1)$

如果对差分结果进行差分，可以得到高阶差分运算，如二阶、三阶等。一般使用向后差分。

2）差分方程

作用：用于描述离散系统的输入输出关系。

定义：用已知的输入序列和未知的输出序列组成的方程。

差分方程的阶数：用未知序列变量最高的序号与最低的序号的差数。



差分方程的分类：线性常系数差分方程和线性变系数差分方程。

2. 离散系统的数学模型

离散时间系统的数学模型常用差分方程来描述。

例 4－1 某人向银行贷款 M 元，月息为 β，定期于每月初还款，设第 N 月初还款 $f(n)$元。若令第 N 月尚未还清的钱款数为 $y(n)$，则有

$$y(n)=(1+\beta)y(n-1)-f(n)$$

或 $$y(n)-(1+\beta)y(n-1)=-f(n)\text{（一阶常系数差分方程）}$$

例 4－2 考虑一个银行存款本息的计算问题。储户每月定期在银行存款，设第 N 月存款 $f(n)$ 元，银行支付月息为 β，每月利息按复利计算，请计算储户在 K 个月后的本息总额 $y(n)$。

分析可知 $y(n)$由 3 部分组成：前面$(n-1)$个月的本息总额 $y(n-1)$；第 N 月存款 $f(n)$ 元；$y(n-1)$的月息为 $\beta y(n-1)$。

$\therefore y(n)=y(n-1)+\beta y(n-1)+f(n)$

或 $$y(n)-(1+\beta)y(n-1)=f(n)\text{（一阶常系数差分方程）}$$

N 阶常系数差分方程差分方程通式为

$$\begin{aligned}&y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+\cdots+a_Ny(n-N)\\&=b_0f(n)+b_1f(n-1)+b_2f(n-2)+\cdots+b_My(n-M)\end{aligned}$$

或 $$\sum_{i=0}^{N}a_iy(n-i)=\sum_{j=0}^{M}b_jf(n-j)\quad(a_0=1)\qquad(4-1)$$

3. 离散系统的框图表示

离散时间系统的框图由 3 种基本单元构成，这 3 种基本单元是加法单元、延迟单元、数乘单元。图 4.3 给出了这 3 种基本单元的框图。对于离散 LTI 系统的框图，都是由图 4.3 这 3 种基本单元组成的。

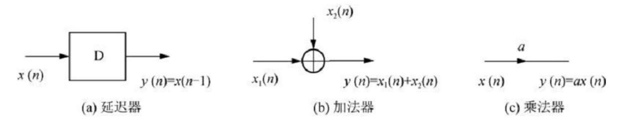


图 4.3 离散时间系统的基本运算单元

例 4－3 图 4.4 所示是一个离散时间系统的框图，试写出响应信号 $y(n)$与激励信号 $x(n)$之间的数学关系。

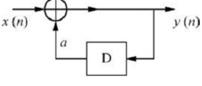


图 4.4 例 4－3 框图

解 从图可以看出，

$$y(n)=x(n)+ay(n-1)$$

整理可以得到：

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

这是一个一阶差分方程。

4.2 离散时间系统的时域分析

离散系统的时域分析与连续系统的时域分析类似。离散系统的差分方程的解法有经典解法、递推法、卷积法、z 域解法。本节只介绍递推法、卷积法，z 域解法在下节讲解。



小知识：

差分方程的经典解法与微分方程经典解法相类似，解都由齐次解和特解组成。

4.2.1 递推法

由式(4－1)，且注意到 $a_0=1$，差分方程可以写为

$$y(n)=\sum_{j=0}^{M}b_j y(n-j)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i) \tag{4-2}$$

从上式可以看出，如果求时间序号 n 对应的输出样值 $y(n)$，除必须知道时间序号 n 以及 n 以前的输入样值 $x(n)$，$x(n-1)$，…，$x(n-M)$外，还必须知道时间序号 n 以及 n 以前的输出样值 $y(n)$，$y(n-1)$，…，$y(n-N)$。因此，式(4－2)给出了求解式(4－1)差分方程的递推公式。这种求解差分方程的方法称为递推法。

根据上面的讨论，为求 $n\geqslant 0$ 时的响应 $y(n)$，除知道激励 $x(n)$外，还必须知道 $y(-1)$，$y(-2)$，…，$y(-N)$这 N 个样值。这 N 个样值被称为 N 阶差分方程的初始条件或初始状态。这说明 N 阶差分方程的定解需要 N 个初始条件。通常，我们又把 N 阶差分方程描述的离散系统称为 N 阶离散系统。

例 4－4 已知离散系统的差分方程为 $y(n)-ay(n-1)=x(n)$，其初始条件为 $y(-1)=1$，激励为 $x(n)=\delta(n)$。试用递推法求解该离散系统的响应 $y(n)$。

解 由于差分方程为

$$y(n)-ay(n-1)=x(n)$$

整理成递推形式

$$y(n)=x(n)+ay(n-1)$$

将 $x(n)=\delta(n)$代入，得

$$y(0)=x(0)+ay(-1)=1+a$$
$$y(1)=x(1)+ay(0)=(1+a)a$$
$$y(2)=x(2)+ay(1)=(1+a)a^2$$
$$\vdots$$
$$y(n)=x(n)+ay(n-1)=(1+a)a^n$$

所以递推法是一种非常简单的方法，特别适合计算机求解，但高阶求解困难。



4.2.2　卷积法

与连续系统相似，离散系统的解(响应)也分为零输入响应和零状态响应，零输入响应的求法与经典解法齐次解一样，因此下面主要讲解卷积积分求解系统的零状态响应。

线性时不变系统的单位冲激响应是指系统在激励为单位抽样序列 $\delta(n)$ 作用下所产生的零状态响应，简称冲激响应，用 $h(n)$ 表示。由差分方程求解冲激响应的时域解法比较复杂，这里不作介绍，后面会讲解冲激响应的变换域(z 域)解法。

由于任意离散信号 $f(n)$ 可以为如下求和形式表示，即

$$f(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)\delta(n-m)$$

如把它作用于已知冲激响应为 $h(n)$ 的系统，则系统的零状态响应为

$$y_{zs}(n)=f(n)*h(n) \tag{4-3}$$


小提醒：

对于一个线性时不变系统，如已知冲激响应 $h(n)$，则任意激励 $f(n)$ 下系统的响应都为 $f(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积。

不同系统具有不同的 $h(n)$，因此常用来表征一个线性时不变系统，可用图 4.5 所示的框图来表示。

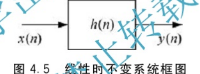


图 4.5　线性时不变系统框图

如两个系统级联在一起，根据卷积的结合律，整个系统相当于一个冲激响应为 $h_1(n)*h_2(n)$ 的系统，如图 4.6 所示；如两个系统并联在一起，根据卷积的分配律，整个系统相当于一个冲激响应为 $h_1(n)+h_2(n)$ 的系统，如图 4.7 所示。

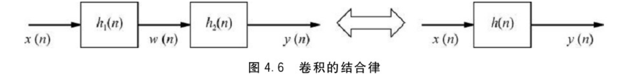


图 4.6　卷积的结合律

图 4.7　卷积的分配律

4.2.3 系统的因果性和稳定性

对于离散 LTI 系统，常用 $h(n)$ 来判断系统的因果性和稳定性。

离散 LTI 系统具有因果性的充分必要条件是 $h(n)=0(n<0)$。

离散 LTI 系统具有稳定性的充分必要条件是 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$，即单位冲激响应绝对可和。

例 4-5 已知某离散 LTI 系统的的单位冲激响应 $h(n)=a^n u(n)$，式中 a 为常数，试分析该系统的因果性和稳定性。

解 (1) 因为 $n<0$，$h(n)=0$，故此系统是因果系统。

(2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|a|^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}|a|^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1-|a|^N}{1-|a|}$

当 $|a|<1$ 时，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\frac{1}{1-|a|}$；当 $|a|>1$ 时，$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\infty$。所以 $|a|<1$ 时，系统是稳定的。

例 4-6 已知某离散 LTI 系统的的单位冲激响应 $h(n)=-a^n u(-n-1)$，式中 a 为常数，试分析该系统的因果性和稳定性。

解 (1) 因为 $n<0$，$h(n)\neq 0$，故此系统不是因果系统。

(2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=-\infty}^{-1}|a|^n=\sum_{n=1}^{\infty}|a|^{-n}=\begin{cases}\frac{1}{|a|-1}, & |a|>1\\ \infty, & |a|\leqslant 1\end{cases}$

所以 $|a|>1$ 时，系统是稳定的。

4.3 离散时间系统的 z 域分析

4.3.1 系统对基本信号 z^n 的零状态响应

公式：
$$y_{zs}(n)=z^n H(z) \tag{4-4}$$

证明 $y_{zs}(n)=f(n)*h(n)$

此处 $f(n)=z^n$

$$y_{zs}(n)=z^n*h(n)=h(n)*z^n=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)z^{(n-m)}$$
$$=z^n\sum_{m=0}^{\infty}h(m)z^{(-m)}=z^n H(z)$$

式中：$H(z)$ 是单位序列响应 $h(n)$ 的单位 z 变换，称为离散系统的系统函数；z^n 称为离散系统的特征函数。

所以有，离散系统对 z^n 的零状态响应等于 z^n 与系统函数 $H(z)$ 的乘积。



4.3.2　任意信号 $f(n)$ 作用下的零状态响应

1. 公式

$$y_{zs}(n)=Z^{-1}[F(z)H(z)] \tag{4-5}$$

2. 求解步骤

(1) 求任意信号 $f(n)$ 的 z 变换 $F(z)$。

(2) 求系统函数 $H(z)$，其求法如下：

法一：已知 $h(n)$ 利用 z 变换得到 $H(z)$；

法二：已知输入输出信号，利用 $H(z)=\dfrac{Y_{zs}(z)}{F(z)}$ 得到 $H(z)$；

法三：对差分方程两边同时 z 变换，并考虑当 $n<0$ 时，$y(n)$ 和 $f(n)$ 均为零即可得到。

(3) 求零状态响应 $y_{zs}(n)=Z^{-1}[F(z)H(z)]$。

例 4-7　已知离散系统的输入为 $f_1(n)=u(n)$，零状态响应 $y_{1zs}(n)=3^n u(n)$，求输入为 $f_2(n)=(n+1)u(n)$ 时系统的零状态响应 $y_{2zs}(n)$。

解　$f_1(n)$、$y_{1zs}(n)$ 的 z 变换分别为

$$F_1(z)=z[f_1(n)]=\frac{z}{z-1} \quad |z|>1$$

$$Y_{1zs}(z)=z[y_{1zs}(n)]=\frac{z}{z-3} \quad |z|>3$$

可求得系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z)=\frac{Y_{1zs}(z)}{F_1(z)}=\frac{z-1}{z-3}$$

$f_2(n)$ 的 z 变换为

$$F_2(z)=z[f_2(n)]=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-1}=\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \quad |z|>1$$

求得系统 $y_{2zs}(n)$ 的 z 变换为

$$Y_{2zs}(z)=H(z)F_2(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-3)}=\frac{\frac{3}{2}z}{z-1}-\frac{\frac{1}{2}z}{z-3} \quad |z|>3$$

得到系统的零状态响应 $y_{2zs}(n)$ 为

$$y_{2zs}(n)=Z^{-1}[Y_{2zs}(z)]=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}3^n\right)u(n)$$

4.3.3　差分方程的 z 域分析解法

利用 z 变换求解线性离散时间系统的响应，其原理就是基于 z 变换的线性和时移特性，对差分方程两边同时进行 z 变换，把差分方程转换为代数方程，从而使求解过程简化。

设 N 阶线性差分方程为

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i f(n-i)$$

设 $f(n)$是因果序列，即 $n<0$ 时，$f(n)=0$，已知初始条件 $y(-1)$，$y(-2)$，…，$y(-N)$。利用单边 z 变换时移特性 $Z[f(n-m)u(n)] = z^{-m}\sum_{n=-m}^{-1} f(n)z^{-n} + z^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$ ，对差分方程两边同时 z 变换，整理可得到

$$Y(z) = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} F(z) - \frac{\sum_{i=0}^{N}\left[a_i z^{-i} \cdot \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}\right]}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$$

$$= H(z)F(z) + - \frac{\sum_{i=0}^{N}\left[a_i z^{-i} \cdot \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}\right]}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$$

上式右边第一项与系统的初始状态无关，为零状态响应的 z 变换，即 $Y_{zs}(z)=H(z)F(z)$，逆变换即可得到 $y_{zs}(n)$；第二项与系统的输入信号无关，称为零输入响应 z 变换，即 $Y_{zi}(z) = -\frac{\sum_{i=0}^{N}\left[a_i z^{-i} \cdot \sum_{l=-i}^{-1} y(l) z^{-l}\right]}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}$，逆变换即可得到 $y_{zi}(n)$。

对于常见的二阶向后差分方程

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 f(n) + b_1 f(n-1) + b_2 f(n-2)$$

整理可得到公式

$$Y(z) = -\frac{a_1 y(-1) + a_2 y(-2) + a_2 z^{-1} y(-1)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} F(z)$$

例 4-8 离散系统的差分方程为 $y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = f(n) - 3f(n-2)$，若 $f(n)=2u(n)$、$y(-1)=3$、$y(-2)=-1$，试求系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$、零输入响应 $y_{zi}(n)$、全响应 $y(n)$。

解 利用上面公式有

$$Y(z) = -\frac{a_1 y(-1) + a_2 y(-2) + a_2 z^{-1} y(-1)}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} F(z)$$

$$= \frac{3y(-1) - 2f(-2) - 2z^{-1} y(-1)}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} + \frac{z^2 - 3z}{z^2 - 3z + 2} \cdot \frac{2z}{z-1}$$

所以零输入响应有

$$Y_{zi}(z) = \frac{3y(-1) - 2f(-2) - 2z^{-1} y(-1)}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{11z^2 - 6z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{16z}{z-2} - \frac{5z}{z-1}$$

逆变换得到

$$y_{zi}(n) = -5u(n) + 16 \cdot 2^n u(n)$$



零状态响应有

$$Y_{zs}(z)=H(z)\cdot F(z)=\frac{z^2-3z}{z^2-3z+2}\cdot\frac{2z}{z-1}=\frac{-4z}{z-2}+\frac{6z}{z-1}+\frac{4z}{(z-1)^2}$$

逆变换得到

$$y_{zs}(n)=6u(n)+4u(n)-4\cdot 2^n u(n)$$

求得全响应为

$$y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)=-5u(n)+4nu(n)+18\cdot 2^n u(n)$$

4.3.4 离散时间系统的稳定性和因果性

稳定系统要求 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$，有 $H(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$，则稳定系统要求 $H(z)$ 的收敛域包含单位圆。因果系统要求 $h(n)=0$(当 $n<0$ 时)，那么 $H(z)$的收敛域包含∞点，即∞点不是极点，极点分布在某个圆内。若系统是稳定因果的，则 $H(z)$的收敛域为 $r<|z|\leqslant\infty$，$0<r<1$。这样，系统因果稳定的条件是 $H(z)$的所有极点集中在单位圆的内部。

例 4-9 已知 $H(z)=\dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$，$0<|a|<1$，分析其因果性和稳定性。

解 $H(z)$的极点为 $z=a$，$z=a^{-1}$。

(1) 收敛域为 $a^{-1}<|z|\leqslant\infty$时，对应的系统是因果的，但由于收敛域不包含单位圆，所以该系统是不稳定的，所得单位冲激响应 $h(n)=(a^n-a^{-n})u(n)$。

(2) 收敛域为 $0\leqslant|z|<a$ 时，对应的系统是非因果、非稳定的，所得单位冲激响应 $h(n)=-(a^n-a^{-n})u(-n-1)$。

(3) 收敛域为 $a<|z|<a^{-1}$时，对应的系统是非因果的，但收敛域于单位圆，所以该系统是稳定的，所得单位冲激响应 $h(n)=a^{|n|}$，是双边序列。

4.3.5 离散时间系统的频率响应特性

1. 频率响应特性定义

对于 LTI 离散时间系统，当系统函数 $H(z)$收敛域包含单位圆时，系统函数 $H(z)$在 z 平面单位圆上的特性称为系统的频率响应特性，简称频率特性，表示为

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\phi(\omega)} \tag{4-6}$$

式中：$\left|H(e^{j\omega})\right|$是 $H(e^{j\omega})$的幅值，称为离散时间系统的幅频特性；$\phi(\omega)$是 $H(e^{j\omega})$的相位，称为离散时间系统的相频特性。

2. 频率响应特性物理意义

与连续时间系统正弦激励下的响应类似，如果系统的输入序列为正弦(指数)序列，输出也为同频的正弦(指数)序列，其幅值为激励幅值与系统幅频特性值的乘积，其相位为激励初相角与系统相频特性值之和。如当激励为 $f(n)=A\sin(n\omega_0)u(n)$，系统函数为 $H(z)$时，则系统的稳态响应为

$$y_{ss}(n)=A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\sin[n\omega_0+\phi(\omega_0)]u(n)$$

3. 频率特性的几何确定法

如果已知系统函数 $H(z)$在 z 平面上的零极点分布，则可通过几何方法简便、直观地求出离散系统的频率响应，即已知

$$H(z)=G\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

则有

$$H(e^{j\omega})=G\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|\angle\phi(\omega) \tag{4-7}$$

仿照连续时间系统中计算 $H(j\omega)$的几何作图法，在 z 平面也逐点求得离散时间系统的频率响应。利用极坐标表示形式

$$e^{j\omega}-z_r=A_r e^{j\psi_r}$$
$$e^{j\omega}-p_i=B_i e^{j\theta_i}$$

有

$$H(e^{j\omega})=G\frac{B_1B_2\cdots B_M\angle(\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_M)}{A_1A_2\cdots A_N\angle(\varphi_1+\varphi_2+\cdots\varphi_N)} \tag{4-8}$$

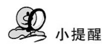
于是幅频响应为

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{\prod_{r=1}^{M}B_r}{\prod_{i=1}^{N}A_i} \tag{4-9}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\theta_r-\sum_{i=1}^{N}\varphi_i \tag{4-10}$$

式中：A_i、φ_i 分别表示 z 平面上极点 p_i 到单位圆上某点矢量$(e^{j\omega}-p_i)$的长度和夹角；B_r、θ_r 分别表示 z 平面上零点 z_r 到单位圆上某点矢量$(e^{j\omega}-z_r)$的长度和夹角，如图 4.8 所示。如果单位圆上点 D 不断移动，就可以得到全部的频率响应，且 $H(e^{j\omega})$是周期为 2π 的函数，因此只要点 D 转一周就可以确定系统的频率响应。利用这种方法可以比较方便地由 $H(z)$的零极点位置求出系统的频率响应。


小提醒：

(1) 位于 z 平面原点处的零极点对幅频特性无影响，因此在 $z=0$ 处加入或减少零极点不会导致幅频特性变化，但会影响相频特性。

(2) 当 D 点靠近某个极点附近时，幅频特性在该点可能出现峰值；当极点位于单位圆上时幅值为无



穷大，系统不稳定；当 D 点靠近某个零点时，幅频特性在该点可能出现谷值；当零点位于单位圆上时幅值为0。

(3) 幅频特性关于 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 偶对称；相频特性关于 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 奇对称。

频率响应的几何确定法的步骤如下(图4.8)。

(1) 求 $H(z)$的零极点，并标在 z 平面上；

(2) 在 z 平面的单位圆上选若干个点，对于每个点分别求各个零点、极点到该点的距离 A_k、B_r 和相位；

(3) 按照前面公式确定该点的幅频特性和相频特性；

(4) 将各点对应的幅频特性和相频特性连成曲线。

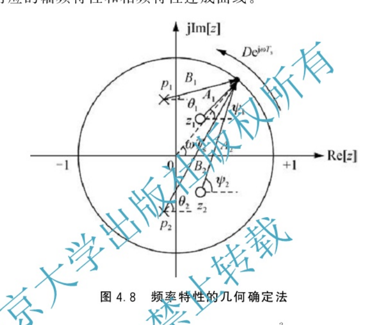


图4.8 频率特性的几何确定法

例4-10 已知离散系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{z^2}{z^2+0.5}$，$|z|>0.5$，求系统的频率响应。

解 系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{e^{j2\omega}}{e^{j2\omega}+0.5}=\frac{2[\cos(2\omega)+j\sin(2\omega)]}{[1+2\cos(2\omega)]+j2\sin(2\omega)}$$

将分母有理化得到

$$H(e^{j\omega})=\frac{4+2[\cos(2\omega)+j\sin(2\omega)]}{5+4\cos(2\omega)}$$

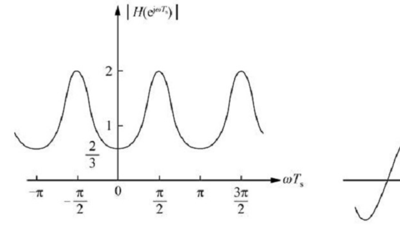
故幅频特性为

$$|H(e^{j\omega})|=\frac{\sqrt{[4+2\cos(2\omega)]^2+[2\sin(2\omega)]^2}}{5+4\cos(2\omega)}=\frac{2}{5+4\cos(2\omega)}$$

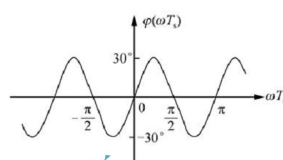
相频特性为

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{\sin(2\omega)}{2+\cos(2\omega)}$$

幅频特性和相频特性曲线图如图4.9所示。



(a) 幅频特性曲线



(b) 相频特性曲线

图 4.9　幅频响应和相频响应曲线

4.4　基于 MATLAB 语言的离散系统分析

1. MATLAB 在离散系统时域分析中的应用

MATLAB 计算卷积的实用函数是 conv() 函数，可调用它来求解系统的零状态响应。函数 impz() 专门用于求解离散系统的单位响应，并绘制时域波形图的函数。

例 4-11　已知某 LTI 离散系统，其单位响应为 $h(n)=u(n)-u(n-4)$，求该系统在激励为 $x(n)=u(n)-u(n-3)$ 时的零状态响应 $y(n)$，并绘制其时域波形图。

解　其程序如下：

```
x=[1 1 1 1];
h=[1 1 1];
y=conv(x,h);
subplot(1,3,1);
stem(0:length(x)-1,x,'filled');title('x(n)');xlabel('n');
subplot(1,3,2);
stem(0:length(h)-1,h,'filled');title('h(n)');xlabel('n');
subplot(1,3,3);
stem(0:length(y)-1,y,'filled');title('y(n)');xlabel('n');
```

运行结果为

```
y=
1    2    3    3    2    1
```

运行结果图如图 4.10 所示。



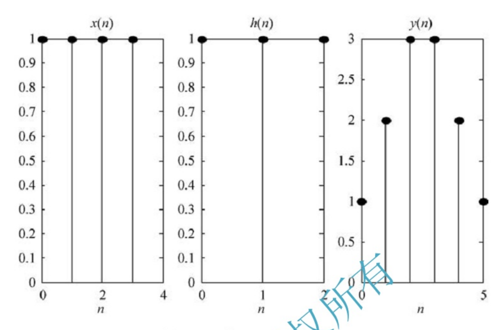


图 4.10　例 4-11 运行结果图

例 4-12　已知描述系统的差分方程为

$$2y(n)-2y(n-1)+y(n-2)=x(n)+3x(n-1)+2x(n-2)$$

试用 MATLAB 函数绘出该系统的单位响应的波形。

解　其程序如下：

```
a=[2-2 1];
b=[1 3 2];
n=30;
impz(b,a,n);
```

运行结果图如图 4.11 所示。

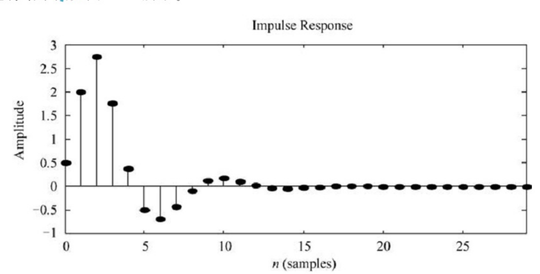


图 4.11　例 4-12 运行结果图

2. MATLAB在离散系统z域分析中的应用

借助z变换可以方便求得系统的响应，而利用MATLAB则可以方便地得到系统的输出响应曲线。

例 4-13 已知描述系统的差分方程为

$$y(n)-2y(n-1)+3y(n-2)=4u(n)-5u(n-1)+6x(n-2)-7u(n-1)$$

其初始条件为$x(-1)=1$，$x(-2)=-1$，$y(-1)=-1$，$y(-2)=1$，求系统$y(n)$的响应曲线。

解 其程序如下：

```
clear;
b=[4,-5,6,-7];
a=[1,-2,3];
x0=[1-1];
y0=[-1 1];
xic=filtic(b,a,y0,x0)
bxplus=1;
axplus=[1-1];
ayplus=conv(a,axplus);
byplus=conv(b,bxplus)+conv(xic,axplus);
[R,P,K]=residue(byplus,ayplus);
Mp=abs(P);
Ap=angle(P)* 180/pi;
N=100;
n=0:N-1;
xn=ones(1,N);
yn=filter(b,a,xn,xic);
plot(n,yn);
```


运行结果为

```
xic=
  -16    16    -7
ayplus=
   1    -3      5    -3
byplus=
  -12    27   -17     0
R=
  -4.0000-8.8388i
  -4.0000+8.8388i
  -1.0000
P=
  1.0000+1.4142i
  1.0000-1.4142i
  1.0000
K=
```

```
  -12
Ap=
  54.7356
  -54.7356
0
```

运行结果如图 4.12 所示。

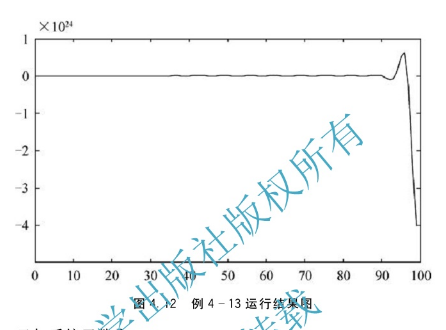


图 4.12　例 4－13 运行结果图

例 4－14　已知系统函数为

$$H(z)=\frac{0.2+0.3z^{-1}+z^{-2}}{1+0.4z^{-1}+z^{-2}}$$

试用 MATLAB 编程求系统的频率响应，画出零极点分布图，求系统的单位脉冲响应。

解　其程序如下：

```
b=[0.2 0.3 1];
a=[1 0.4 1];
[H,W]=freqz(b,a,100);
mag=abs(H);
pha=angle(H);
subplot(2,2,1);
zplane(b,a);grid
title('零极点图');
subplot(2,2,2);
plot(W/pi,mag);grid
xlabel('frequency:pi');
ylabel('magnitude');
title('magnitude response');
subplot(2,2,3);
plot(W/pi,pha/pi);grid
xlabel('frequency:pi');
ylabel('phase:pi');
```

```
title('phase response');
subplot(2,2,4);
impz(b,a);grid
title('冲激响应');
```

运行结果如图 4.13 所示。

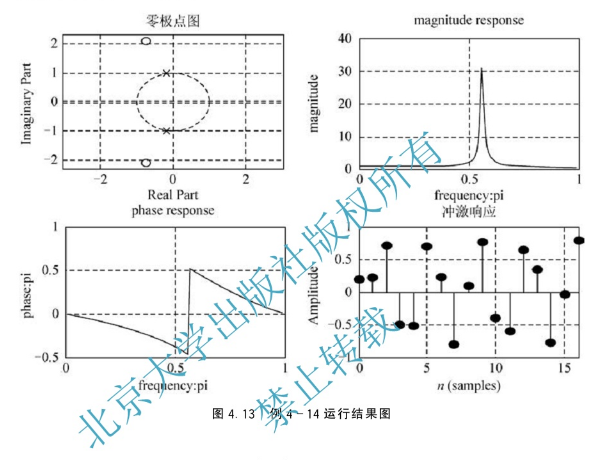


图 4.13 例 4－14 运行结果图

本章小结

1. 离散时间系统及其数学模型

包括了离散时间系统的定义、性质，数学模型差分方程的定义、阶数的判别和建立，离散系统框图的基本单元和利用框图求解系统的差分方程。

2. 离散系统的时域分析

包括了利用递推法和卷积法求解系统的响应，系统因果稳定的时域条件。

3. 离散系统的 z 域分析

包括了任意信号零状态响应 z 域求解方法，差分方程的 z 域求解方法，系统函数的定义与求法，系统因果稳定的复频域条件，离散系统频率响应特性的定义、物理意义及其几何求解方法。



4. 基于 MATLAB 语言的离散系统分析

MATLAB 在离散系统时域、z 域中的应用及典型例题解析。



数字监控系统

数字监控系统主要由摄像部分、传输部分、控制部分以及显示记录部分这四大部分组成。在摄像部分包含有摄像机、室内全方位云台、监听器、防尘罩等；传输部分主要由线材组成；控制部分中包含有图像切换、控制设备等；显示记录部分中包含电脑控制主机、矩阵主机、硬盘录像机、电脑显示器、电视机等。

摄像部分是电视监控系统的前沿部分，是整个系统的“眼睛”，摄像机将监视到的内容变为图像信号、监听器将采集到的内容变为音频信号，通过传输部分将数字音视频信号传送到控制中心的控制主机和存储设备。摄像部分是系统的原始信号源，摄像部分的好坏以及产生图像的质量影响着整个监控系统的质量。因此，电视监控系统采用具有清晰度高、灵敏度好的摄像机；采用光圈、聚焦、变焦三可变的镜头；采用全方位旋转云台；采用具有防盗、防破坏、防尘性能强的防尘罩，等等。

电视监控系统的传输部分主要由图像信号的传输、声音信号的传输，以及对摄像机、镜头、云台等进行控制的控制信号的传输。传输部分常用点对点的方式传输，即图像信号由视频线传输、声音信号由音频线传输、控制信号由控制线传输，另外还有电源线；另外还有一种是通过网络线的方式传输，即摄像部分的图像信号、声音信号及控制信号通过一根网络线传输，再加一根电源线就可以了。

控制部分有两种方案可选，一种是采用电脑控制主机的鼠标和键盘进行控制，另一种是采用专用控制键盘和矩阵主机来控制。

显示部分的主要设备是计算机显示器和大屏幕电视(或投影机)，其中大屏幕电视用作主显示，计算机显示器用作辅助显示，以方便管理人员对前端监控点进行控制时使用。记录部分主要由硬盘录像机组成。

习　　题

4-1　设系统分别用下列差分方程描述，$x(n)$和$y(n)$分别表示输入与输出，判断系统是否线性、时不变？

(1) $y(n)=x(n)+x(n-1)+2x(n-2)$　　(2) $y(n)=2x(n)+4$

(3) $y(n)=nx(n-2)$　　(4) $y(n)=x^2(n)+4$

4-2　根据给定下述系统的差分方程，试判断系统是否因果、稳定，说明理由。

(1) $y(n)=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(n-k)$　　(2) $y(n)=2x(n)+x(n+1)$

(3) $y(n)=x(n-2)$　　(4) $y(n)=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}x(k)$

4-3　根据给定系统的单位冲激响应$h(n)$，试判断系统是否因果、稳定。

(1) $h(n)=-a^n u(-n-1)$　　(2) $h(n)=\delta(n+1)$

(3) $h(n)=2^n R_N(n)$　　(4) $y(n)=\dfrac{1}{n}u(n)$

(5) $h(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+5)$　　(6) $h(n)=2^n u(-n-1)$

4-4　设线性时不变系统的单位冲激响应 $h(n)$ 和输入 $x(n)$ 如下，试分别求输出 $y(n)$。

(1) $h(n)=R_3(n)$，$x(n)=R_7(n)$

(2) $h(n)=2R_6(n)$，$x(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$

(3) $h(n)=0.6^n u(n)$，$x(n)=R_2(n)$

4-5　用 z 变换求下列线性常系数微分方程的解。

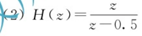
(1) $y(n)-y(n-1)+y(n-2)=f(n)$，$f(n)=2u(n)$，$y(-1)=2$，$y(-2)=1$

(2) $y(n)-\frac{3}{2}y(n-1)+\frac{1}{2}y(n-2)=f(n)$，$f(n)=2^n u(n)$，$y(-1)=0$，$y(-2)=1$

(3) $y(n)-0.9y(n-1)+y(n-2)=f(n)$，$f(n)=0.05u(n)$，$y(-1)=1$

(4) $y(n)-0.1y(n-1)+0.25y(n-2)=f(n)$，$f(n)=u(n)$，$y(-1)=0$，$y(-2)=0$

4-6　利用几何确定法画出下列函数的 $H(z)$ 对应的幅频特性和相频特性。

(1) $H(z)=\frac{1}{z-0.5}$　　(2) $H(z)=\frac{z}{z-0.5}$

(3) $H(z)=\frac{z+0.5}{z}$

4-7　已知一个离散时间系统的差分方程为

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

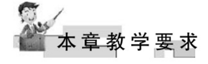
(1) 求系统函数 $H(z)$ 和单位冲激响应 $h(n)$。

(2) 画出系统函数 $H(z)$ 的零极点分布图。

(3) 定性画出系统的幅频特性。

第5章

离散时间信号的频域分析



- 掌握序列傅里叶变换及其运算。
- 理解序列傅里叶变换的基本性质和对称性质。
- 了解周期序列的离散傅里叶级数 DFS 定义。
- 深刻理解离散傅里叶变换 DFT 的定义，DFT 与其他变换的关系及其基本性质。
- 掌握 DFT 的计算；掌握循环卷积定理及其计算。
- 理解离散傅里叶变换 DFT 在计算线性卷积的应用。
- 理解离散傅里叶变换相关 MATLAB 函数应用及典型例题的解析。



[1] 程佩青．数字信号处理教程[M]．3 版．北京：清华大学出版社，2007.

[2] [美]Oppenheim A V，Schafer R W．数字信号处理[M]．董士嘉，译．北京：科学出版社，1981.

[3] 李芬华，常铁原，潘立冬．数字信号处理[M]．北京：中国计量出版社，2007.

[4] [美]Richard G. Lyons．数字信号处理[M]．3 版．朱光明，等译．北京：电子工业出版社，2012.

[5] 刘兴钊．数字信号处理教程[M]．北京：电子工业出版社，2010.



三棱镜光谱

一束白光经过棱镜后会发生什么现象？白光经过棱镜后在光屏上形成一条彩色的光带(光谱)，如图 5.1 所示。牛顿发现了这一现象并最早提出了谱(Spectrum)的概念，指出不同颜色的光具有不同的波

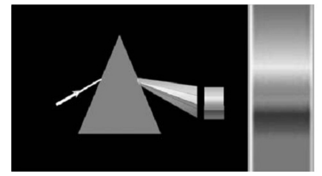


图 5.1　一束光经过三棱镜后产生的光带

长，对应不同的频率。不同颜色的光的频率所形成的频带即是光谱。利用一个三棱镜也可以将不同颜色的光又合成为一束白光。前者对应光的分析，后者对应光的综合。傅里叶分析方法就相当于光谱分析中的三棱镜，而信号相当于一束白光，将信号“通过”傅里叶分析后可得到信号的频谱，频谱做傅里叶反变换又可得到原信号。

与连续时间信号相同，傅里叶变换同样是离散时间信号分析与处理的重要工具之一，本章讨论序列的傅里叶分析。

5.1 离散时间傅里叶变换(DTFT)

5.1.1 离散时间傅里叶变换的定义

序列 $x(n)$ 的离散时间傅里叶变换定义为

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \tag{5-1}$$

其中，必须满足 $x(n)$ 是绝对可和序列这个条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{5-2}$$

式(5-2)是序列 $x(n)$ 的 DTFT $X(e^{j\omega})$ 存在的充分条件。周期序列不满足上述条件，也就是说，离散时间傅里叶变换(DTFT)是指非周期序列的傅里叶变换(FT)。

要由 $X(e^{j\omega})$ 恢复出原信号 $x(n)$ 就是 DTFT 的逆变换 IDTFT(或 IFT)：

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}\right] e^{j\omega m} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega = 2\pi x(m)\end{aligned}$$

式中：

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega = \begin{cases} 2\pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{5-3}$$

由此可知

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{5-4}$$

式(5-4)就是 DTFT 的逆变换 IDTFT。式(5-1)和式(5-4)组成序列的一对傅里叶变换对。

例 5-1 确定下列序列的 DTFT。

(1) $x_1(n) = R_N(n)$

(2) $x_2(n) = \delta(n)$

(3) $x_3(n) = a^n u(n)$，$|a| < 1$

(4) $x_4(n) = \delta(n - n_0)$

(5) $x_5(n) = u(n+3) - u(n-4)$

解 (1) $X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega n}}{1 - e^{-j\omega}}$

(2) $X_2(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)e^{-j\omega n}=1$

(3) $X_3(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a^n u(n)e^{-j\omega n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a^n e^{-j\omega n}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-j\omega})^n=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

式中：$|ae^{-j\omega}|=|a|<1$

(4) $X_4(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0)e^{-j\omega n}=e^{-j\omega n_0}$

(5) 法一：$X_5(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}[u(n+3)-u(n-4)]e^{-j\omega n}=\sum\limits_{n=-3}^{3}e^{-j\omega n}$

$$=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\omega n}+\sum_{n=-1}^{-3}e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\omega n}+\sum_{n=1}^{3}e^{j\omega n}=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}+\frac{1-e^{j3\omega}}{1-e^{j\omega}}e^{j\omega}$$

$$=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}-\frac{1-e^{j3\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{j3\omega}-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{1-e^{-j7\omega}}{1-e^{-j\omega}}e^{j3\omega}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{7}{2}\omega}(e^{j\frac{7}{2}\omega}-e^{-j\frac{7}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}(e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega})}e^{j3\omega}=\frac{\sin(\frac{7}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}$$

法二：$x_5(n)=u(n+3)-u(n-4)=R_7(n+3)$，则 $X_5(e^{j\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}R_7(n+3)e^{-j\omega n}$

由于 $\mathrm{FT}[R_7(n)]=\sum\limits_{n=0}^{6}e^{-j\omega n}=\dfrac{1-e^{-j7\omega}}{1-e^{-j\omega}}$

所以 $X_5(e^{j\omega})=\dfrac{1-e^{-j7\omega}}{1-e^{-j\omega}}e^{j3\omega}=\dfrac{e^{-j\frac{7}{2}\omega}(e^{j\frac{7}{2}\omega}-e^{-j\frac{7}{2}\omega})}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}(e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega})}e^{j3\omega}=\dfrac{\sin(\frac{7}{2}\omega)}{\sin(\frac{1}{2}\omega)}$

5.1.2 离散时间傅里叶变换的性质

1. 周期性

由于当 M 为整数时

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega+2\pi M)n}=X(e^{-j(\omega+2\pi M)n}) \quad (5-5)$$

所以序列的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$是关于 ω 的周期函数，其周期为 2π。可见式(5-4)中的积分范围采用任意 2π 间隔都可以。

2. 线性

如果 $X_1(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[x_1(n)]$，$X_2(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[x_2(n)]$，那么

$$\mathrm{FT}[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+bX_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{5-6}$$

对于任意常数 a 和 b 成立。

3. 时移性与频移性

设 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\mathrm{FT}[x(n)]$，那么

$$\mathrm{FT}[x(n-n_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{5-7}$$

$$\mathrm{FT}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}x(n)]=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)}) \tag{5-8}$$

4. 时域卷积和频域卷积定理

如果 $y(n)=x(n)*h(n)$，那么

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\cdot H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{5-9}$$

如果 $y(n)=x(n)\cdot h(n)$，那么

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{2\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})*H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta \tag{5-10}$$

5. Parseval 定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\mathrm{d}\omega \tag{5-11}$$

即时域能量等于频域能量。

证明

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^*(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\right]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$



小知识：

帕塞瓦尔(Parseval)，数学家。帕塞瓦尔定理指出，一个信号所含有的能量(功率)恒等于此信号在完备正交函数集中各分量能量(功率)之和。它表明信号在时域的总能量等于信号在频域的总能量，即信号经傅里叶变换后其总能量保持不变，符合能量守恒定律。帕塞瓦尔定理又称能量守恒定理。

离散时间傅里叶变换的主要性质见表 5-1。

表 5-1　序列傅里叶变换的主要性质

序　　列	DTFT
$x(n)$	$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$
$y(n)$	$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$
$ax(n)+by(n)$	$aX(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+bY(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，$a$、$b$ 为常数
$x(n-n_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$

续表

序　列	DTFT
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
$x(n)*y(n)$	$X(e^{j\omega})\cdot Y(e^{j\omega})$
$x(n)\cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})$
$nx(n)$	$j[dX(e^{j\omega})/d\omega]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|x(n)\|^2$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|X(e^{j\omega})\|^2 d\omega$

例 5－2　确定下面序列的 DTFT 。

$$y(n)=\begin{cases}\alpha^n, & 0\leqslant n\leqslant M-1, \ |\alpha|<1\\ 0, & 其他\ n\end{cases}$$

解　$y(n)=\alpha^n u(n)-\alpha^n u(n-M)=\alpha^n u(n)-\alpha^M\alpha^{n-M}u(n-M)$

由于　$\mathrm{FT}[\alpha^n u(n)]=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$，$\mathrm{FT}[\alpha^{n-M}u(n-M)]=\frac{e^{-j\omega M}}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

所以　$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}-\alpha^M\frac{e^{-j\omega M}}{1-\alpha e^{-j\omega}}=\frac{1-\alpha^M e^{-j\omega M}}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

例 5－3　确定序列 $v(n)$ 的 DTFT 。

$$d_0 v(n)+d_1 v(n-1)=p_0\delta(n)+p_1\delta(n-1),\quad |d_1/d_0|<1$$

解　由于　$\mathrm{FT}[v(n-1)]=e^{-j\omega}V(e^{j\omega})$

所以　$d_0V(e^{j\omega})+d_1e^{-j\omega}V(e^{j\omega})=p_0+p_1e^{-j\omega}$

由上面的等式，我们得到

$$V(e^{j\omega})=\frac{p_0+p_1e^{-j\omega}}{d_0+d_1e^{-j\omega}}$$

例 5－4　确定序列 $y(n)$ 的 DTFT：$y[n]=(n+1)\alpha^n\mu[n]$，$|\alpha|<1$

解　令 $X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

因此可以将原式写为 $y[n]=nx[n]+x[n]$

由例 1 已知：$X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

故利用性质 $nx(n)$ 的 DTFT 为 $j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}=j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)=\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$

所以　$Y(e^{j\omega})=\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}+\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$

5.1.3　DTFT 的对称性

关于对称性，我们先介绍以下有关对称的定义和性质。

1. 共轭对称序列

如果序列 $x_e(n)$满足

$$x_e(n)=x_e^*(-n) \tag{5-12}$$

那么序列 $x_e(n)$称为共轭对称序列或共轭偶序列。对于连续变量的函数，也有类似的定义，称为共轭对称函数。

将 $x_e(n)$表示为实部加虚部的形式

$$x_e(n)=x_{er}(n)+jx_{ei}(n)$$

上式中用$-n$ 代替 n，并取共轭，得到

$$x_e^*(-n)=x_{er}(-n)-jx_{ei}(-n)$$

由于共轭对称序列满足式(5-12)，可得

$$x_{er}(n)+jx_{ei}(n=x_{er}(-n)-jx_{ei}(-n)$$

由此得到

$$x_{er}(n)=x_{er}(-n) \tag{5-13}$$

$$x_{ei}(n)=-x_{ei}(-n) \tag{5-14}$$

即共轭对称序列其实部是偶函数，而其虚部是奇函数。

2. 共轭反对称序列

如果序列 $x_o(n)$满足

$$x_o(n)=-x_o^*(-n)$$

那么序列 $x_o(n)$称为共轭反对称序列或共轭奇序列。同样对于连续变量的函数，类似的定义为共轭反对称函数。

证明　将 $x_o(n)$表示成实部和虚部的形式

$$x_o(n)=x_{or}(n)+jx_{oi}(n)$$

则　$x_o^*(-n)=x_{or}(-n)-jx_{oi}(-n)$

根据共轭反对称序列的定义，可以得到

$$x_{or}(n)=-x_{or}(-n) \tag{5-15}$$

$$x_{oi}(n)=x_{oi}(-n) \tag{5-16}$$

即共轭反对称序列其实部是奇函数，而其虚部是偶函数。

例 5-5　试分析序列 $x(n)=e^{j\omega n}$的对称性。

解　由于 $x^*(-n)=e^{j\omega n}$

所以　$x(n)=x^*(-n)$

可知 $x(n)$为共轭对称序列。

将 $x(n)$展开为 $x(n)=\cos\omega n+j\sin\omega n$

可见 $x(n)$ 的实部 $\cos\omega n$ 是偶函数，虚部 $\sin\omega n$ 是奇函数。

3. DTFT 的对称性

通常，我们可以将任一序列 $x(n)$分解为

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n) \tag{5-17}$$

由于

$$x^*(-n)=x_e^*(-n)+x_o^*(-n)=x_e(n)-x_o(n) \tag{5-18}$$



可得 $$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)] \tag{5-19}$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)] \tag{5-20}$$

对于频域函数 $X(e^{j\omega})$也有类似的概念和结论

$$X(e^{j\omega})=X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega}) \tag{5-21}$$


小提醒：

$X(e^{j\omega})$是连续函数。

这里 $X_e(e^{j\omega})=X_e^*(e^{-j\omega})$，$X_o(e^{j\omega})=-X_o^*(e^{-j\omega})$

同理可得 $$X_e(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})] \tag{5-22}$$

$$X_o(e^{j\omega})=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{-j\omega})] \tag{5-23}$$

下面来研究序列傅里叶变换 DTFT 的对称性。

(1) 如果将 $x(n)$与 $X(e^{j\omega})$ 分解为

$$x(n)=x_r(n)+jx_i(n)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})=X_e(e^{j\omega})+X_o(e^{j\omega})$$

那么 $$x_r(n)\overset{FT}{\leftrightarrow}X_e(e^{j\omega}) \tag{5-24}$$

$$jx_i(n)\overset{FT}{\leftrightarrow}X_o(e^{j\omega}) \tag{5-25}$$

即序列分成实部和虚部两部分，实部对应的 FT 具有共轭对称性，虚部和 j 一起的 FT 具有共轭反对称性。

证明　由于 $$x_r(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]$$

$$x_i(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(n)]$$

则 $$FT[x_r(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)]e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\{FT[x(n)]+FT[x^*(n)]\}$$

$$=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})]=X_e(e^{j\omega})$$

同理可得　$FT[jx_i(n)]=X_o(e^{j\omega})$

若 $x(n)$为实序列，其 FT 具有共轭对称，而实序列乘以 j 以后(即纯虚序列)的 FT，具有共轭反对称性。

(2) 如果将 $x(n)$与 $X(e^{j\omega})$ 分解为

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(e^{j\omega})=X_r(e^{j\omega})+jX_i(e^{j\omega}) \tag{5-26}$$

由于 $x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$，$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$

并且根据性质　$x^*(n)\overset{FT}{\leftrightarrow}X^*(e^{-j\omega})$和 $x(-n)\overset{FT}{\leftrightarrow}X(e^{-j\omega})$

可知 $$x^*(-n)\overset{\text{FT}}{\leftrightarrow}X^*(e^{j\omega})$$

所以 $$\text{FT}[x_e(n)]=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})]=\text{Re}[X(e^{j\omega})]=X_r(e^{j\omega})$$

$$\text{FT}[x_o(n)]=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{j\omega})]=j\text{Im}[X(e^{j\omega})]=jX_i(e^{j\omega})$$

因此 $$x_e(n)\overset{\text{FT}}{\leftrightarrow}X_r(e^{j\omega}) \tag{5-27}$$

$$x_o(n)\overset{\text{FT}}{\leftrightarrow}jX_i(e^{j\omega}) \tag{5-28}$$

即序列共轭对称分量和共轭反对称分量的 FT 分别等于序列傅里叶变换的实部和 j 乘虚部。

例 5-6 已知系列 $x(n)=a^n u(n)$，$-\infty<n<\infty$，试确定 $x(n)$的奇函数部分 $x_o(n)$和偶函数部分的 DTFT。

解 因为 $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

并且 $x_e(n)\overset{\text{FT}}{\leftrightarrow}X_r(e^{j\omega})$ $x_o(n)\overset{\text{FT}}{\leftrightarrow}jX_i(e^{j\omega})$

所以 $$\text{FT}[x_e(n)]=\text{Re}[X(e^{j\omega})]=\text{Re}\left[\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right]=\text{Re}\left[\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\cdot\frac{1-ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}\right]$$

$$=\frac{1-a\cos\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

$$\text{FT}[x_o(n)]=j\text{Im}[X(e^{j\omega})]=j\text{Im}\left[\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right]=j\text{Im}\left[\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\cdot\frac{1-ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}\right]$$

$$=\frac{-a\sin\omega}{1+a^2-2a\cos\omega}$$

5.1.4 ZT 与 DTFT 的关系

序列 $x(n)$当且仅当其 z 变换 $X(z)$的收敛域包含单位圆 $z=e^{j\omega}$时，其 FT$X(e^{j\omega})$才存在：

$$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega} \tag{5-29}$$

式中：$z=e^{j\omega}$表示在 z 平面上 $r=1$ 的圆，该圆称为单位圆。式(5-29)表明单位圆上的 z 变换就是序列的傅里叶变换。如果已知序列的 z 变换，可用式(5-29)，很方便地求出序列的 FT，条件是收敛域中包含单位圆。

例 5-7 $x(n)=u(n)$，求其 z 变换。

解 $$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}$$

$X(z)$存在的条件是 $|z^{-1}|<1$，因此收敛域为 $|z|>1$，

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z|>1$$

由 $x(z)$表达式表明，极点是 $z=1$，单位圆上的 z 变换不存在，或者说收敛域不包含单位圆，因此其傅里叶变换不存在，更不能用式(5-29)求 FT。

5.2 离散周期序列的傅里叶分析

在第一章中讲过连续时间周期信号在频域可表示成傅里叶级数。连续时间周期信号的傅里叶级数表示其包含了无穷多个频率分量。

连续时间周期信号的傅里叶级数(FS)为

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{T}kt}$$

即 $x(t)$中包含的频率分量为 $f=k/T$(k 为整数)，其中基波频率分量为 $f_0=1/T$。

$x(t)$被分解为复指数谐波线性组合，相邻的谐波频率间隔为 $1/T$，其中 T 是基本周期。因为连续时间信号的频率范围是从$-\infty$延伸到∞，所以信号有无穷个频率分量是可能的，与之相比，离散时间信号在区间$(-\pi,\ \pi)$或$(0,\ 2\pi)$的频率范围是唯一的，类似的一个基本周期为 N 的离散时间信号包含以 $2\pi/N$ 弧度为间隔的频率分量。因此，离散时间周期信号的傅里叶级数表示最多包含 N 个频率分量。这是连续时间周期信号和离散时间周期信号的傅里叶级数之间的主要差别。



小知识：

法国数学家傅里叶发现，任何周期函数都可以用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数来表示(选择正弦函数与余弦函数作为基函数是因为它们是正交的)，后世称为傅里叶级数(法文：série de Fourier)一种特殊的三角级数。

设 $\tilde{x}(n)$是以 N 为周期的周期序列，$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+N)$。由于周期性序列不满足绝对可和的条件，因此其 DTFT 不存在。但是它和连续时间周期信号类似，由于其周期性，可以展成傅里叶级数

$$\tilde{x}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5-30}$$

序列 $\tilde{x}(n)$的傅里叶级数表示包含了 N 个指数谐波函数

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1 \tag{5-31}$$

式(5－30)中 a_k 是傅里叶级数的系数(即某个谐波的幅度数)。可以证明

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \tag{5-32}$$

并且 a_k 也是一个以 N 为周期的周期序列，这是因为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(k+lN)n}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}，\ l\ 取整数 \tag{5-33}$$

即周期为 N 的信号 $\tilde{x}(n)$的频谱是一个周期为 N 的序列。

通常令 $\tilde{X}(k)=Na_k$，得到

$$\tilde{X}(k)=\mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N{}^{kn} \tag{5-34}$$

$$\tilde{x}(n)=\mathrm{IDFS}(\tilde{X}(k))=\sum_{k=0}^{N-1}a_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N{}^{-kn} \tag{5-35}$$

式中 $W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$ 称为相位因子或旋转因子。式(5-34)和式(5-35)称为一对 DFS(Discrete Fourier Series)变换对。DFS 变换对公式表明，一个周期序列虽然是无穷长序列，但是只要知道它的一个周期的内容(一个周期内信号变化情况)，其他的内容也就知道了。所以这种无穷长序列实际上只有 N 个序列值的信息是有用的，因此周期序列与有限长序列有着本质的联系。

式(5-35)表明将周期序列分解成 N 次谐波，第 k 个谐波频率为 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$，$k=0$，1，2，…，$N-1$，幅度为$\frac{1}{N}\tilde{X}(k)$。基波分量的频率是$\frac{2\pi}{N}$，幅度是$\frac{1}{N}\tilde{X}(1)$。一个周期序列可以用其 DFS 表示它的频谱分布规律。

例 5-8 设 $x(n)=R_4(n)$，将 $x(n)$以 $N=8$ 为周期，进行周期延拓，得到图 5.2(a)所示的周期序列 $\tilde{x}(n)$，周期为 8，求 $\tilde{x}(n)$的 DFS。

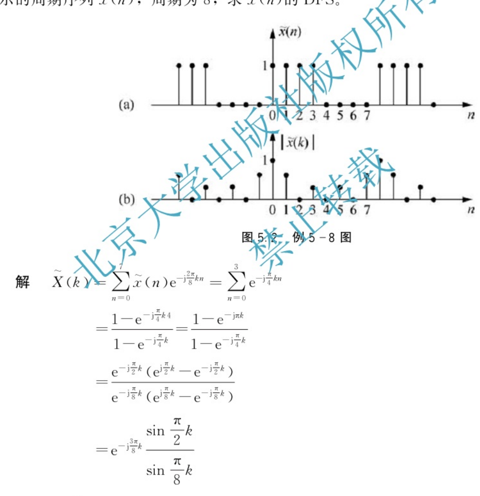


图 5.2 例 5-8 图

解
$$\begin{aligned}\tilde{X}(k)&=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{8}kn}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}kn}\\&=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}k4}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}k}}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}k}}\\&=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}k})}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{8}k}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{8}k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{8}k})}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3\pi}{8}k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}\end{aligned}$$

其幅度特性$|\tilde{X}(k)|$如图 5.2(b)所示。

5.3 离散傅里叶变换

傅里叶分析是 LTI 系统分析与设计中非常有用的工具之一。从本质上讲，这些信号的傅里叶表示就是用正弦信号(或是指数信号)作为分量来分解这些信号，使用这样的分解来



表示信号称为信号的频域表示。可以证明，实际中大多数有意义的信号都能分解为正弦信号分量的和的形式，对周期信号，这种分解称为傅里叶级数，对能量有限信号，这种分解称为傅里叶变换。本节将定义一种新的变换——离散傅里叶变换。为什么要采用离散的傅里叶变换？原因很简单，因为要利用计算机计算傅里叶变换，而计算机计算数据，不能计算连续变量，所以必须分离连续的傅里叶变换，使它成为离散的傅里叶变换。因此，傅里叶变换有 4 种可能形式，见表 5－2。

表 5－2 傅里叶变换的 4 种可能形式

	连续非周期	连续周期	离散非周期	离散周期
时域	$x(t)$	$\tilde{x}(t)$	$x(m)$	$\tilde{x}(m)$
频域	$x(\mathrm{j}\Omega)$ (FT)	$x(k\Omega_m)$ (FS)	$x(\mathrm{e})$ (DTFT)	$\tilde{x}(k)$ (DFS)
	连续非周期	连续周期	离散非周期	离散周期

5.3.1 离散傅里叶变换的定义

1. 频域采样

从 5.2 节的分析可知，非周期序列具有连续谱，即 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是 ω 的连续函数：

$$x(n)\overset{\mathrm{FT}}{\leftrightarrow}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{5-36}$$

实际上，当在计算机上实现信号的频谱分析时，要求：①时域、频域都是离散的；②时域、频域都是有限长。FT、FS、DTFT、DFS 都不符合要求，由此提出离散傅里叶变换的概念。

假定在频域对 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$做周期性抽样，取样间隔为 ω_k 弧度，因为 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$具有周期性且周期性为 2π，所以在基频范围的样本是必需的（$0\sim2\pi$ 包含所有频率信息）。为方便起见，在区间 $0\leqslant\omega<2\pi$ 内取 N 个等间隔样本，取样间隔 $\omega_k=2\pi/\mathrm{N}$。

如果计算 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 在 $\omega_\mathrm{k}=2\pi\mathrm{k}/\mathrm{N}$ 时的值，可以得到

$$X\left(\frac{2\pi}{N}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{5-37}$$

令 $x(n)$的长度为 L。若 $L\leqslant N$，那么我们能够从样本值中恢复出 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$或 $x(n)$。因此可以直接通过 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的样本值 $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$ 来表示 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，由此可以得到 DFT 的公式。

2. DFT(Discrete Fourier Transform)定义

由于前面所讲的当 $L>N$ 时失真，因此只定义有限长序列的 DFT，对无限长序列可先分解成有限长。设一个有限长度的序列 $x(n)(0\leqslant n<N-1)$，它的 N 点离散傅里叶变换可以通过在 ω 轴($0\leqslant\omega<2\pi$)上对 $X(e^{j\omega})$ 均匀抽样得到

$$X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-38}$$

可以看到 $X(k)$ 也是频域上的有限长序列，长度为 N。序列 $X(k)$ 称为序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT，N 称为 DFT 变换区间长度。

通常相位因子用 W_N 表示

$$W_N=e^{-j2\pi/N} \tag{5-39}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{kn}\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-40}$$

$X(k)$ 的离散傅里叶逆变换(IDFT)为

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-kn}\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-41}$$

通常称式(5-40)和式(5-41)为离散傅里叶变换对。

DFT 使得时域序列与频域序列之间建立关系，使信号在微处理器上的频域分析成为可能。

例 5-9 已知下列定义在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 长度为 N 的序列：

$$x(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & \text{其他 } n\end{cases}\text{ 和 } y(n)=\begin{cases}1, & n=m\\0, & \text{其他 } n\end{cases}$$

计算它们的 N 点 DFT。

解 $X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=1\times W_N^{k\times 0}=1,\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}y(n)W_N^{kn}=1\times W_N^{km}=W_N^{km},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

5.3.2 DFT 与其他变换的关系

1. DFT 与 DFS 的关系

由 5.3 节分析可知

$$\tilde{X}(k)=\text{DFS}[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N{}^{kn}\quad -\infty\leqslant n\leqslant\infty$$

$$\tilde{x}(n)=\text{IDFS}(\tilde{X}(k))=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j(2\pi/N)kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N{}^{-kn}\quad -\infty\leqslant k\leqslant\infty$$

是一对离散傅里叶级数对，其中 $\tilde{x}(n)$ 是周期为 N 的周期序列。

如果定义一个有限长序列：
$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{5-42}$$

根据 DFT 变换对的定义有

$$x(n)=\mathrm{IDFT}(X(k))=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/N)kn}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

对比 DFS 和 DFT 公式可知，原理上 $\tilde{x}(n)$和其 DFS$\tilde{X}(k)$的各自一个周期即可表示完整的序列；由于实际中在计算机上实现信号的频谱分析时要求信号在时域和频域都是离散、有限长，则利用 DFS 的时域、频域的周期性，各取一个周期，就形成 DFT 变换对。

将 $\tilde{x}(n)$的第一个周期区间($n=0$，1，…，$N-1$)定义为 $\tilde{x}(n)$的“主值区间”，定义 $x(n)$为 $\tilde{x}(n)$的“主值序列”，可表示为

$$\begin{cases}\tilde{x}(n)=x((n))_N\\ x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=x((n))_N R_N(n)\end{cases}\tag{5-43}$$

式中：$x((n))_N$ 表示有限长序列 $x(n)$以 N 为周期的周期延拓序列，即

$$x((n))_N=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(n+mN)\tag{5-44}$$

在数学中$((n))_N$ 表示“n 对 N 求余”或“n 对 N 取模值”。例如，因为 $11=1\times8+3$，所以$((11))_8=3$。因此假设 $\tilde{x}(n)$是周期为 8 的周期序列，$x(n)$为 $\tilde{x}(n)$的“主值序列”，则

$$\tilde{x}(11)=x((11))_8=x(3)$$
$$\tilde{x}(-2)=x((-2))_8=x(6)$$

同理，将 $\tilde{X}(k)$的第一个周期区间(n=0，1，…，N−1)定义为 $\tilde{X}(k)$的“主值区间”，定义 $X(k)$ 为 $\tilde{X}(k)$的“主值序列”，可表示为

$$\begin{cases}X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)\\ \tilde{X}(k)=X((k))_N\end{cases}\tag{5-45}$$

式中：$\tilde{X}(k)$ 是 $X(k)$ 以 N 为周期的周期延拓。

2. DFT 与 DTFT 的关系

假如 $x(n)$非周期、有限长，则傅里叶变换存在，那么对 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$在 N 个等间隔频率 $\omega_k=2\pi k/N$，$k=0$，1，…，$N-1$ 抽样，则可得 $X(k)$。

$$X(k)=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\quad 0\leqslant k\leqslant N-1\tag{5-46}$$

例 5-10　计算序列 $x(n)=R_4(n)$的 8 点 和 16 点 DFT 。

解　若 $N=8$，则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{8}kn}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{8}k\pi}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ 7$$

若 $N=16$，则

$$X(k)=\sum_{n=0}^{15}x(n)W_{16}{}^{kn}=\sum_{n=0}^{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{16}kn}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{16}k\pi}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)},\ k=0,1,\cdots,15$$

例 5－11 已知一个有限长序列：

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant L-1\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases}$$

用 DFT 与 DTFT 的关系计算它的 N 点 DFT。其中 $N\geqslant L$ 。

解 该序列的 DTFT 为

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=0}^{L-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\sum_{n=0}^{L-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega L}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$$

$x(n)$的 D 点 DFT 是对 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$在频域上的等间距抽样，其间距为 $\omega_k=2\pi k/N$，$k=0,1,\cdots,N-1$，因此

$$X(k)=\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kL/N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}}\quad k=0,1,\cdots,N-1.$$

3. DFT 与 ZT 的关系

设序列 $x(n)$的 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

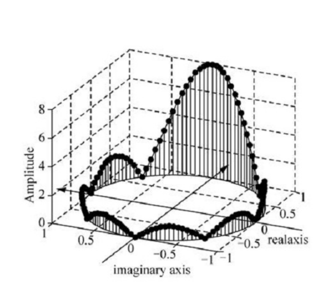
其收敛域包含单位圆，若将 $X(z)$在单位圆上间距抽样

$$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/N}\quad k=0,1,\cdots,N-1. \tag{5-47}$$

可以得到

$$X(k)=X(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/N}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N}\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-48}$$

若序列 $x(n)$为有限长度 L，且 $L\leqslant N$，那么该序列可以从它的 N 点 DFT 中恢复出来。$R_8(n)$ 的 64 点 DFT 和 128 点 DFT 如图 5.3 所示。



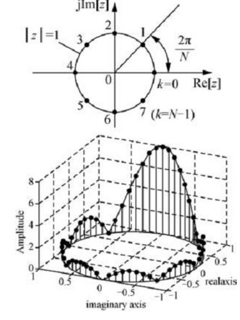


图 5.3 $R_8(n)$的 64 点 DFT 和 128 点 DFT

5.3.3 离散傅里叶变换的基本性质

与 DTFT 相同，DFT 也满足一些性质，这些性质在信号处理应用中是很有用的。这些性质中有些与 DTFT 类似，有些则不同。

1. 隐含周期性

设序列 $x(n)$为定义在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 的有限长序列，$x(n)$与 $X(k)$是一对 N 点 DFT 变换对，则

$$x(n+N)=x(n) \tag{5-49}$$

$$X(k+N)=X(k) \tag{5-50}$$

证明 由 DFT 定义可知

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn} \quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

$$X(k+N)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(k+N)n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(k+N)n} \quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

由于相位因子具有周期性

$$W_N^{k+mN}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(k+mN)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}=W_N^k$$

可得 $X(k+N)=X(k)$。

同理，利用 IDFT 定义可以证明 $x(n+N)=x(n)$。

该性质称隐含周期性，因为 $x(n)$和 $X(k)$是有限长序列，不是真的周期序列。

2. 线性性质

设 $x_1(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X_1(k)$，$x_2(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X_2(k)$，其中 $N=\max[N_1,N_2]$，N_1 和 N_2 分别是有限长序列 $x_1(n)$和 $x_2(n)$长度，则对于任意实常数或复常数 a_1与 a_2有

$$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}a_1X_1(k)+a_2X_2(k) \tag{5-51}$$

3. 循环移位性质

1）序列的循环移位

设序列 $x(n)$为定义在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 的有限长序列，则对于任意整数 n_0，其移位序列 $x_1[n]=x[n-n_0]$将不再是定义在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 的范围内了。因此，需要定义另一种类型的移位，从而保证移位后的序列仍然在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 的范围内，这种所需的移位称为循环移位。

我们知道周期为 N 的周期序列 $\tilde{x}(n)$可由对长度为 $L(L\leqslant N)$的有限长序列 $x(n)$周期延拓来获得

$$\tilde{x}(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n-lN) \tag{5-52}$$

因而定义序列 $x(n)$的 m 个单位的循环移位 $y(n)$为

$$y(n)=\tilde{x}(n+m)R_N(n)=x((n+m))_NR_N(n) \tag{5-53}$$

式中：$x((n+m))_N$ 表示对$x(n)$以 N 为周期进行周期延拓的序列$\tilde{x}(n)$的 m 点线性移位；$R_N(n)$表示对此延拓移位后再取其主值区间。

于是可以得出，N 点序列的循环移位等价于序列周期性延拓的线性移位的主值序列，反之亦然的结论。循环卷积的实质是将 $x(n)$左移 m 个单位，其移出主值区间($0\leqslant n\leqslant N-1$)的序列值依次从右侧进入主值区间，即在主值区间内循环移动，因而称为“循环移位”，如图 5.4 所示。

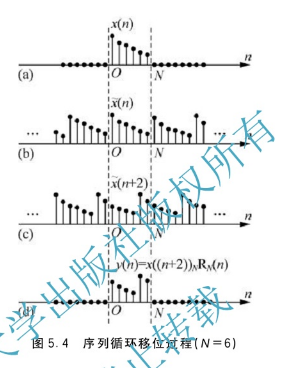


图 5.4　序列循环移位过程($N=6$)

2) 时域循环移位定理

设 $x(n)$是长度为 $M(M\leqslant N)$的有限长序列，$x(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X(k)$并且 $y(n)=x((n+n_0))_N R_N(n)$，那么

$$y(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}Y(k)=X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k n_0/N}=W_N^{-kn_0}X(k) \tag{5-54}$$

证明

$$Y(k)=\text{DFT}[y(n)]_N=\sum_{n=0}^{N-1}x((n+n_0))_N R_N(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x((n+n_0))_N W_N^{kn}$$

令 $n+n_0=m$，则

$$Y(k)=\sum_{m=n_0}^{N-1+n_0}x((m))_N W_N^{k(m-n_0)}=W_N^{-kn_0}\sum_{m=n_0}^{N-1+n_0}x((m))_N W_N^{km}$$

由于 $x((m))_N W_N^{km}$ 是以 N 为周期的，因此该项在其任意周期中求和结果相同。因此可将上式中的求和限改为 $0\leqslant m\leqslant N-1$，可得

$$Y(k)=W_N^{-kn_0}\sum_{m=0}^{N-1}x((m))_N W_N^{km}=W_N^{-kn_0}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{km}=W_N^{-kn_0}X(k)$$

3) 频域循环移位定理

设 $X(k)=\text{IDFT}[x(n)]_N(0\leqslant k\leqslant N-1)$，且 $Y(k)=X((k+k_0))_N R_N(k)$，则



$$y(n)=\mathrm{IDFT}[Y(k)]=x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k_0 n/N}=W_N^{k_0 n}x(n) \tag{5-55}$$

上式的证明方法与时域循环定理类似，请读者自己证明。

4. 复共轭序列的 DFT

设序列 $x(n)$ 为定义在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 的有限长序列，$x(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X(k)$，则

$$x^*(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X^*((N-k))_N R_N(k)=X^*(N-k) \tag{5-56}$$

且

$$x^*(N-n)\overset{\mathrm{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X^*((k))_N R_N(k)=X^*(k) \tag{5-57}$$

其中根据隐含周期性有 $X(N)=X(0)$。

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[x^*(n)]&=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{nk}\\&=\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{-nk}\right]^*\xlongequal{W_N^{-kn}=W_N^{(-k+N)n}}\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{(N-k)n}\right]^*\\&=X^*(N-k)\end{aligned}$$

类似的方法可以证明

$$\mathrm{DFT}[x^*(N-n)]=X^*(k)$$

5. DFT 的共轭对称性

1) 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

这里有限长序列其定义区间为 $(0\sim(N-1))$，与在前面所讲的无限长 $(n\in(-\infty,+\infty))$ 的对称不同，这里所谓的对称性是指关于 $N/2$ 或 $(N-1)/2$ 点的对称性，而不是关于原点对称的。为了区别傅里叶变换所定义的共轭偶对称(或共轭奇对称)，下面用 $x_{\mathrm{ep}}(n)$ 和 $x_{\mathrm{op}}(n)$ 分别表示有限长共轭偶对称序列和共轭奇对称序列。

共轭对称：
$$x_{\mathrm{ep}}(n)=x_{\mathrm{ep}}^*(N-n),\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-58}$$

共轭反对称：
$$x_{\mathrm{op}}(n)=-x_{\mathrm{op}}^*(N-n),\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-59}$$

若 N 为偶数，用 $\frac{N}{2}-n$ 代替 n，则

共轭对称：
$$x_{\mathrm{ep}}\left(\frac{N}{2}-n\right)=x_{\mathrm{ep}}^*\left(\frac{N}{2}+n\right),\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-60}$$

共轭反对称：
$$x_{\mathrm{op}}\left(\frac{N}{2}-n\right)=-x_{\mathrm{op}}^*\left(\frac{N}{2}+n\right),\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-61}$$

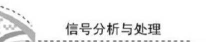
如同前面讲过的任何序列可分解成共轭对称分量和共轭反对称分量之和一样，任何有限长序列也可分解成共轭对称序列和共轭反对称序列之和，如图 5.5 所示。

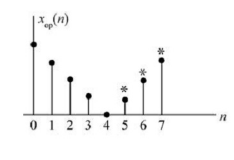
假设我们将 $x(n)$ 分解为

$$x(n)=x_{\mathrm{ep}}(n)+x_{\mathrm{op}}(n),\ 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-62}$$

将 n 换成 $N-n$，并取共轭，再将定义式代入得到

$$x^*(N-n)=x_{\mathrm{ep}}^*(N-n)+x_{\mathrm{op}}^*(N-n)=x_{\mathrm{ep}}(n)-x_{\mathrm{op}}(n) \tag{5-63}$$





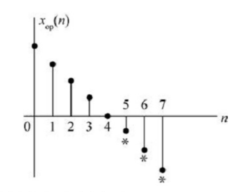


图 5.5　有限长共轭对称和共轭反对称序列

将式(5-62)和式(5-63)分别相加减再除以 2，可得

$$\begin{cases} x_{ep}(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)] \\ x_{op}(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)] \end{cases},\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-64}$$

同样的方法也可以得到

$$\begin{cases} X_{ep}(k)=\dfrac{1}{2}[X(n)+X^*(N-k)] \\ X_{op}(k)=\dfrac{1}{2}[X(n)-X^*(N-k)] \end{cases},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-65}$$

2）DFT 的共轭对称性

设序列 $x(n)$ 为定义在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 的有限长序列，$x(n)\underset{N}{\overset{\text{DFT}}{\leftrightarrow}}X(k)$，如果将 $x(n)$ 和 $X(k)$ 分别表示为

$$x(n)=x_r(n)+\mathrm{j}x_i(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n),\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-66}$$

$$X(k)=X_r(k)+\mathrm{j}X_i(k)=X_{ep}(k)+X_{op}(k),\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-67}$$

（1）由于

$$x_r(n)=\mathrm{Re}[x(n)]=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(n)] \tag{5-68}$$

$$\mathrm{j}x_i(n)=\mathrm{jIm}[x(n)]=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(n)] \tag{5-69}$$

由复共轭序列的 DFT 性质可知 $x^*(n)\underset{N}{\overset{\text{DFT}}{\leftrightarrow}}X^*(N-k)$

因此可得

$$x_r(n)\underset{N}{\overset{\text{DFT}}{\leftrightarrow}}\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]=X_{ep}(k) \tag{5-70}$$

$$\mathrm{j}x_i(n)\underset{N}{\overset{\text{DFT}}{\leftrightarrow}}\frac{1}{2}[X(k)-X^*(N-k)]=X_{op}(k) \tag{5-71}$$

（2）因为

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)] \tag{5-72}$$

$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)] \tag{5-73}$$



由复共轭序列的 DFT 性质可知 $x^*(N-n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X^*(k)$

由此可得到

$$x_{\text{ep}}(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}\frac{1}{2}[X(k)+X^*(k)]=\text{Re}[X(k)]=X_{\text{r}}(k) \tag{5-74}$$

$$x_{\text{op}}(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}\frac{1}{2}[X(k)-X^*(k)]=\text{jIm}[X(k)]=\text{j}X_{\text{i}}(k) \tag{5-75}$$

由上面的分析，可以得出以下结论。

有限长序列 $x(n)$的实部和虚部乘以 j 的 DFT 分别是 $X(k)$的共轭对称分量和共轭反对称分量；有限长序列 $x(n)$的共轭对称分量和共轭反对称分量的 DFT 分别是 $X(k)$的实部和虚部乘以 j 。

3）实序列 DFT 的共轭对称性

设序列 $x(n)$是一个有限长度的实序列，即

$x(n)=x^*(n)$ 且 $x(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X(k)$，那么 $X(k)$必满足以下性质。

（1）由于 $x^*(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X^*(N-k)$，并且实值序列 $x(n)=x^*(n)$。

所以 $$X(k)=X^*(N-k)\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-76}$$

（2）若 $x(n)$是实偶对称序列，即

$$x(n)=x^*(N-n)=x(N-n) \tag{5-77}$$

因为 $x(N-n)=x^*(N-n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X^*(k)$

另外 $x(n)=x^*(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X^*(N-k)$ 而 $x(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X(k)$

可得 $$X(k)=X^*(k) \tag{5-78}$$

即 $X(k)$是实序列。

并且可得 $$X(k)=X^*(k)=X^*(N-k)=X(N-k) \tag{5-79}$$

即 $X(k)$是偶对称序列。由此可知 $X(k)$是实偶对称序列。

（3）若 $x(n)$是实奇对称序列，即

$$x(n)=-x^*(N-n)=-x(N-n) \tag{5-80}$$

由于 $x(N-n)=x^*(N-n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X^*(k)$

$$x(n)=x^*(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X^*(N-k)\qquad x(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X(k)$$

可得 $$X(k)=-X^*(k) \tag{5-81}$$

即 $X(k)$是纯虚序列。

由此可知 $$X(k)=-X^*(k)=X^*(N-k)=-X(N-k) \tag{5-82}$$

即 $X(k)$是奇对称序列。

所以 $X(k)$是纯虚奇对称序列。

根据上面的结论，在计算实序列的 DFT 时，往往可以利用其对称性来缩减运算量。例如：计算实序列 $x(n)$的 N 点 DFT 。

（1）计算 $X(k)(k=0, 1, 2, \cdots, N/2)$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{2}$$

(2) 利用共轭对称性质，可以得到

$$X(N-k)=X^*(k),\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{2}-1$$

6. Parseval 定理

设两个长度小于 N 的有限长复值序列 $x(n)$ 与 $y(n)$，若 $x(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X(k)$，$y(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}Y(k)$，那么

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)Y^*(k) \tag{5-83}$$

若 $x(n)=y(n)$，则

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2 \tag{5-84}$$

式(5-84)表明一个序列在时域计算的能量与在频域计算的能量是相等的。

7. 循环卷积(圆周卷积)

1) 时域循环卷积

设两个有限长序列长度为 N_1 的 $x_1(n)$ 和长度为 N_2 的 $x_2(n)$，它们各自的 N 点 DFT 分别为

$$x_1(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X_1(k)\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

$$x_2(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X_2(k)\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

其中 $N=\max[N_1,\ N_2]$。

如果将这两个 DFT 相乘，其结果也是一个序列 $x(n)$ 的长度为 N 的 DFT，设为 $X(k)$。现在来确定序列 $x(n)$ 与序列 $x_1(n)$ 及 $x_2(n)$ 的关系。

因为
$$X(k)=X_1(k)\cdot X_2(k)\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

$\{X(k)\}$ 的 IDFT 为

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_1(k)X_2(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}}\\&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi km}{N}}\Big]\Big[\sum_{l=0}^{N-1}x_2(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi kl}{N}}\Big]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi kn}{N}}\\&=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)\sum_{l=0}^{N-1}x_2(l)\Big[\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k(n-m-l)/N}\Big]\end{aligned} \tag{5-85}$$

式(5-85)中括号内的和有下面的形式：

$$\sum_{k=0}^{N-1}a^k=\begin{cases}N,\ a=1\\ \dfrac{1-a^N}{1-a},\ a\neq 1\end{cases} \tag{5-86}$$



这里 a 被定义为 $a=e^{j2\pi(n-m-l)/N}$。由于当 $n-m-1$ 等于 N 的整数倍时 $a=1$；另外对于 $n-m-1$ 的任意取值，必有 $a^N=e^{j2\pi(n-m-l)}=1$ 因此

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi k(m-n-l)/N}=\begin{cases}N, & n-m-l=pN \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases} \quad p\text{ 为任意整数} \tag{5-87}$$

其中 $$n-m-l=pN \Rightarrow l=n-m+p'N=((n-m))_N \tag{5-88}$$

如果将式(5-87)的结果带入式(5-85)，则可以得到希望的关于 $x(n)$ 的表达式：

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\left[\sum_{n-m+p'N=0}^{N-1} x_2(n-m+p'N)\right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)\left[x_2((n-m))_N R_N(n)\right],\ n=0,1,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{5-89}$$

类似地

$$x(n)=\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)\left[x_1((n-m))_N R_N(n)\right],\ n=0,1,\cdots,N-1 \tag{5-90}$$

总结如下：设有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度分别为 N_1 和 N_2，$N=\max[N_1, N_2]$，它们各自的 N 点 DFT 为的 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$，则

$$x_1(n) Ⓝ x_2(n) \overset{DFT}{\underset{N}{\leftrightarrow}} X_1(k)X_2(k),\ 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-91}$$

这里 $x_1(n)Ⓝx_2(n)$ 表示 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的 N 点循环卷积。式(5-91)称为时域循环卷积定理。

式(5-89)所描述的循环卷积过程中，要求对 $x_2(m)$ 循环反转和循环移位，特别是 N 点序列的循环卷积长度仍为 N，这显然与一般线性卷积不同，故称为循环卷积，为了区别循环卷积，称序列的卷积为线性卷积。

2) 频域循环卷积

设 $x(n)=x_1(n)x_2(n)$，$x(n)\overset{DFT}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X(k)$，则

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)]=\frac{1}{N}X_1(k)ⓃX_2(k) \tag{5-92}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X_1(l)X_2((k-l))_N R_N(k) \tag{5-93}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}X_2(l)X_1((k-l))_N R_N(k) \tag{5-94}$$

式(5-92)称为频域循环卷积定理。

例 5-12 已知两个有限长序列 $g(n)=\{1, 2, 0, 1\}$，$h(n)=\{2, 2, 1, 1\}$，$0\leqslant n\leqslant 3$，求它们的 4 点循环卷积。

解一 图解法

根据定义式，图解法计算循环卷积包括以下 5 个步骤：

周期延拓—时间翻转—循环时移—乘法—求和，具体计算过程如图 5.6 所示。

图 5.6　例 5-12 解析法流程图

解二　解析法

4 点循环卷积 $y_C[n]$ 为

$$y_C[n]=g[n]\textcircled{N}h[n]=\sum_{m=0}^{3} g[m]h[(n-m)_4],$$

由上面的计算式可以得到

$$\begin{aligned}y_C[0]&=\sum_{m=0}^{3} g[m]h[(-m)_4]\\&=g[0]h[0]+g[1]h[3]+g[2]h[2]+g[3]h[1]\\&=(1\times2)+(2\times1)+(0\times1)+(1\times2)=6\end{aligned}$$

同样　$y_C[1]=\sum_{m=0}^{3} g[m]h[(1-m)_4]$

$=g[0]h[1]+g[1]h[0]+g[2]h[3]+g[3]h[2]$

$=(1\times2)+(2\times2)+(0\times1)+(1\times1)=7$

$y_C[2]=\sum_{m=0}^{3} g[m]h[(2-m)_4]$

$=g[0]h[2]+g[1]h[1]+g[2]h[0]+g[3]h[3]$

$=(1\times1)+(2\times2)+(0\times2)+(1\times1)=6$

$y_C[3]=\sum_{m=0}^{3} g[m]h[(3-m)_4]$

$=g[0]h[3]+g[1]h[2]+g[2]h[1]+g[3]h[0]$

$=(1\times1)+(2\times1)+(0\times2)+(1\times2)=5$

所以　$y_C(n)=\{6，7，6，5\}，0\leqslant n\leqslant 3$

5.3.4　用 DFT 计算线性卷积

一般实际应用中常常需要进行线性卷积运算，然而直接计算线性卷积计算量大，并且计算机无法判断 $y(n)$的长度，若输入为无限长，就更无法计算，其运算量随长度成级数增长。DFT 的快速算法 FFT 的出现，使 DFT 在数字通信、语音信号处理、图像处理、雷达理论、光学、医学、地震等各个领域都得到广泛应用。由于可以利用 FFT 对 DFT 进行有效的计算，我们希望能够利用 DFT 来计算线性卷积。

1. 利用 DFT 计算循环卷积

根据时域循环卷积定理设

$$y(n)=x_1(n)\,Ⓝ\,x_2(n)=\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)[x_1((n-m))_N R_N(n)],\ n=0,1,\cdots,N-1$$

其中　$x_1(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X_1(k)，x_2(n)\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\leftrightarrow}}X_2(k)$

那么　$Y(k)=\text{DFT}[y(n)]=X_1(k)X_2(k)，0\leqslant k\leqslant N-1$

由此可见，循环卷积即可在时域直接计算，也可按如图 5.7 所示的计算框图在频域计算，由于 DFT 有快速 FFT，当 N 很大时，在频域计算的速度要快得多，因而常用 DFT(FFT)计算循环卷积。

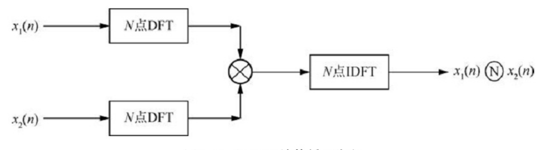


图 5.7　用 DFT 计算循环卷积

2. 用 DFT 计算线性卷积

在实际应用中的问题大多数是求解线性卷积，如信号 $x(n)$通过系统 $h(n)$，其输出就是线性卷积 $y_1(n)=x(n)*h(n)$。而循环卷积比起线性卷积，在运算速度上有很大的优越性，它可以采用快速傅里叶变换技术，而 DFT 只能直接用来计算循环卷积，若能利用循环卷积求线性卷积，会带来很大方便。为此需导出线性卷积和循环卷积相等的条件，即在什么条件下用循环卷积代替线性卷积而不会产生失真。

1）两个有限长序列的线性卷积

设 $h(n)$ 和 $x(n)$是两个长度分别为 N 和 M 的有限长序列，令 $L'=M+N-1$。则线性卷积为

$$\begin{aligned}y_1(n)=x(n)*h(n)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)\\&=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)\end{aligned}\tag{5-95}$$

这里 $y_l(n)$ 是一个长度为 $L'=M+N-1$ 的有限长序列。

而循环卷积为

$$y_c(n)=h(n)\,Ⓛ\,x(n)=\sum_{m=0}^{L-1}h(m)x((n-m))_L R_L(n)\tag{5-96}$$

由于
$$x((n))_L=\sum_{q=-\infty}^{\infty}x(n+qL)\tag{5-97}$$

可得
$$y_c(n)=\sum_{m=0}^{L-1}h(m)\sum_{q=-\infty}^{\infty}x(n-m+qL)R_L(n)\tag{5-98}$$

由等式(5-95)可得

$$\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n+qL-m)=y_1(n+qL)\tag{5-99}$$

所以
$$y_c(n)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}y_1(n+qL)R_L(n)=\tilde{y}_{1L}R_L(n)\tag{5-100}$$

即 L 点循环卷积 $y_c(n)$是线性卷积 $y_1(n)$ 以 L 为周期的周期延拓的主值序列。由于 $y_1(n)$ 是一个长度为 $L'=M+N-1$ 的有限长序列，显然当 $L'=M+N-1\leqslant L$ 时，延拓时不会发生混叠，即

$$y_1(n)=y_c(n)$$

此时 $y_c(n)$的前 $M+N-1$ 个值正好是 $y_1(n)$的全部非零序列值，而 $y_c(n)$剩下的 $L-(M+N-1)$个点上的序列值是补充的零值。



小提醒：

若 $h(n)$ 和 $x(n)$是两个长度分别为 N 和 M 的有限长序列，当 $L\geqslant M+N-1$ 时，

$$h(n)\,Ⓛ\,x(n)=h(n)*x(n)$$

由此可见，利用 DFT 来计算线性卷积可以有以下步骤。



因为 $x(n)$ 和 $h(n)$ 是长度分别为 M 和 N 的有限长序列，令 $L=M+N-1$，定义两个长度为 L 的有限长序列：

$$x'(n)=\begin{cases}x(n), & 0\leqslant n\leqslant M-1\\0, & M\leqslant n\leqslant L-1\end{cases} \tag{5-101}$$

$$h'(n)=\begin{cases}h(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0, & N\leqslant n\leqslant L-1\end{cases} \tag{5-102}$$

通过对 $x(n)$ 和 $h(n)$ 补充零样本值得到上面两个序列。那么

$$y_1(n)=x(n)*h(n)=y_c(n)=x'(n)\textcircled{L}h'(n) \tag{5-103}$$

上面的过程如图 5.8 所示。

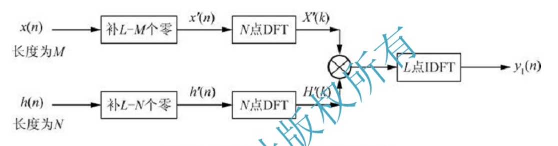


图 5.8　用 DFT 计算线性卷积的原理图

图 5.8 所示框图中的 DFT 和 IDFT 通常用快速算法(FFT)来实现，所以上面计算线性卷积的方法又称为快速卷积法。

2）一个有限长序列和一个无限长序列的线性卷积

在工程实际中，$x(n)$ 一般为无限长因果序列，而 $h(n)$ 是有限长序列。例如，数字电话系统中，从电话系统开通时刻开始(记为零时刻)，线路上的语言信号源源不断，对其抽样所得数字信号 $x(n)$ 就是无限长因果序列，由于 L 无穷大，按上面有限长序列 $x(n)$ 求线性卷积，计算机无法实现，则可采用分段的方法完成。

设 $x(n)$ 是一个无限长序列，$h(n)$ 是一个有限长序列，其长度为 N。首先我们将 $x(n)$ 分段：

$$x(n)=\sum_{k=0}^{\infty}x_k(n) \tag{5-104}$$

$$x_k(n)=x(n)\cdot R_M(n-kM) \tag{5-105}$$

$$y_k(n)=h(n)*x_k(n) \tag{5-106}$$

则

$$\begin{aligned}y(n)&=h(n)*x(n)=h(n)*\left[\sum_{k=0}^{\infty}x_k(n)\right]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}[h(n)*x_k(n)]=\sum_{k=0}^{\infty}y_k(n)\end{aligned} \tag{5-107}$$

其卷积过程如图 5.9 所示。

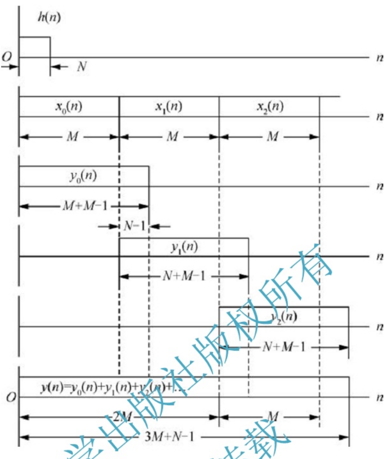


图 5.9 有限长序列和无限长序列线性卷积分段卷积示意图

例 5-13 已知一个长度为 5 的有限长序列，$x(n)=\{1,0,2,1,3\}$，$0\leqslant n\leqslant 4$，确定并画出：

(1) $y_1(n)=x(n)*x(n)$

(2) $y_2(n)=x(n)ⓝ x(n)$，N=5

(3) $y_3(n)=x(n)ⓝ x(n)$，N=10

解 (1) $y_1(n)=x(n)*h(n)$

$=[\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)+3\delta(n-4)]*[\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)+3\delta(n-4)]$

$=\delta(n)+4\delta(n-2)+2\delta(n-3)+10\delta(n-4)+4\delta(n-5)+13\delta(n-6)+6\delta(n-7)+9\delta(n-8)$

(2) 根据线性卷积和循环卷积的关系可知

$$y_2(n)=y_1((n))_5R_5(n)$$

因为线性卷积的长度为 $5+5-1=9$，循环卷积的长度 $5<9$，所以在对 $y_1(n)$ 周期延拓时会有混叠现象，$y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 不等。

$$y_2(n)=5\delta(n)+13\delta(n-1)+10\delta(n-2)+11\delta(n-3)+10\delta(n-4)$$

(3) 10 点循环卷积，其长度大于线性卷积的长度，因此

$y_3(n)=y_1(n)$

$=\delta(n)+4\delta(n-2)+2\delta(n-3)+10\delta(n-4)+4\delta(n-5)+13\delta(n-6)+6\delta(n-7)+9\delta(n-8)$

上述 3 题中的结果如图 5.10 所示。



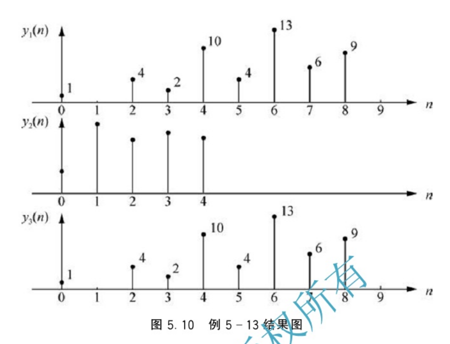


图 5.10　例 5-13 结果图

例 5-14　通过补零样本，将图 5.11 所示两个长度为 4 的有限长序列延拓成长度为 7 的有限长序列。试用线性卷积与循环卷积的关系计算这两个序列的 7 点循环卷积和线性卷积。

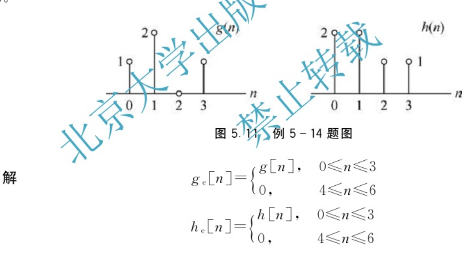


图 5.11　例 5-14 题图

解
$$g_e[n]=\begin{cases}g[n], & 0\leqslant n\leqslant 3\\ 0, & 4\leqslant n\leqslant 6\end{cases}$$

$$h_e[n]=\begin{cases}h[n], & 0\leqslant n\leqslant 3\\ 0, & 4\leqslant n\leqslant 6\end{cases}$$

$g_e[n]$和$h_e[n]$的 7 点循环卷积为

$$y[n]=\sum_{m=0}^{6}g_e[m]h_e[(n-m)_7],\ 0\leqslant n\leqslant 6$$

由上面的式子得

$$\begin{aligned}y[0]&=g_e[0]h_e[0]+g_e[1]h_e[6]\\&\quad+g_e[3]h_e[4]+g_e[4]h_e[3]+g_e[5]h_e[2]+g_e[6]h_e[1]\\&=g[0]h[0]=1\times 2=2\end{aligned}$$

$$y[1]=g[0]h[1]+g[1]h[0]=(1\times 2)+(2\times 2)=6,$$

$$\begin{aligned}y[2]&=g[0]h[2]+g[1]h[1]+g[2]h[0]\\&=(1\times 1)+(2\times 2)+(0\times 2)=5,\end{aligned}$$

$$y[3]=g[0]h[3]+g[1]h[2]+g[2]h[1]+g[3]h[0]$$
$$=(1\times1)+(2\times1)+(0\times2)+(1\times2)=5,$$
$$y[4]=g[1]h[3]+g[2]h[2]+g[3]h[1]$$
$$=(2\times1)+(0\times1)+(1\times2)=4,$$
$$y[5]=g[2]h[3]+g[3]h[2]=(0\times1)+(1\times1)=1,$$
$$y[6]=g[3]h[3]=(1\times1)=1$$

由线性卷积和循环卷积的关系可知上面的结果就是 $y_L[n]$，如图 5.12 所示。

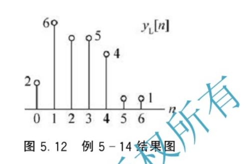


图 5.12　例 5-14 结果图

N 点循环卷积也可以写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} y_C[0] \\ y_C[1] \\ y_C[2] \\ \vdots \\ y_C[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[N-1] & h[N-2] & \cdots & h[1] \\ h[1] & h[0] & h[N-1] & \cdots & h[2] \\ h[2] & h[1] & h[0] & \cdots & h[3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N-1] & h[N-2] & h[N-3] & \cdots & h[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g[0] \\ g[1] \\ g[2] \\ \vdots \\ g[N-1] \end{bmatrix}$$

注：$N\times N$ 矩阵中的对角元素是相等的，这样的矩阵称为循环矩阵。

5.4　基于 MATLAB 语言的离散时间信号频域分析

5.4.1　计算离散时间系统的 DTFT

已知一个离散时间系统

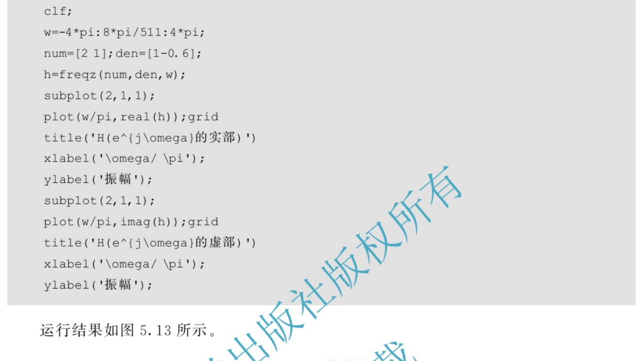
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

可以用 MATLAB 函数 frequz 非常方便地在给定的 L 个离散频率点 $\omega=\omega_l$ 处进行计算。由于 $H(e^{j\omega})$ 是 ω 的连续函数，需要尽可能大地选取 L 的值(因为严格说，在 MATLAB 中不使用 symbolic 工具箱是不能分析模拟信号的，但是当抽样时间间隔充分小的时候，可产生平滑的图形)，以使得命令 plot 产生的图形和真实离散时间傅里叶变换的图形尽可能一致。在 MATLAB 中，freqz 计算出序列$\{b_0, b_1, \cdots, b_M\}$和$\{a_0, a_1, \cdots, a_N\}$的 L 点离散傅里叶变换，然后对其离散傅里叶变换值相除得到 $H(e^{j\omega l})$，$l=1, 2, \cdots, L$。为了更加方便快速地运算，应将 L 的值选为 2 的幂，如 256 或者 512。

例 5－15　运用 MATLAB 画出以下系统的频率响应。

$$y(n)-0.6y(n-1)=2x(n)+x(n-1)$$

程序：



```
clf;
w=-4*pi:8*pi/511:4*pi;
num=[2 1];den=[1-0.6];
h=freqz(num,den,w);
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,real(h));grid
title('H(e^{j\omega}的实部)')
xlabel('\omega/ \pi');
ylabel('振幅');
subplot(2,1,1);
plot(w/pi,imag(h));grid
title('H(e^{j\omega}的虚部)')
xlabel('\omega/ \pi');
ylabel('振幅');
```


运行结果如图 5.13 所示。

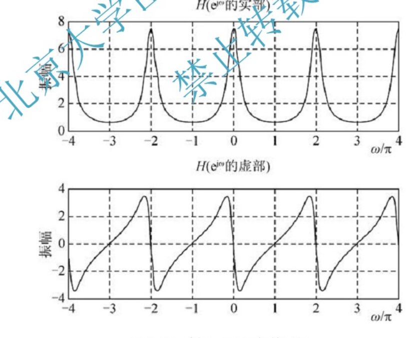


图 5.13　例 5－15 运行结果图

5.4.2　离散时间傅里叶变换 DTFT 的性质

利用 MATLAB 可以验证 DTFT 的相关性质。例如运用 MATLAB 程序验证离散时间傅里叶变换 DTFT 的时移性和频移性。

设 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$，那么

$$FT[x(n-n_0)]=e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$FT[e^{j\omega_0 n}x(n)]=X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

```
%验证离散时间傅里叶变换 DTFT 的时移性
clf;
w=-pi:2*pi/255:pi;wo=0.4*pi;D=10;
num=[1 2 3 4 5 6 7 8 9];
h1=freqz(num,1,w);
h2=freqz([zeros(1,D)num],1,w);
subplot(2,2,1);
plot(w/pi,abs(h1));grid
title('原序列的幅度谱')
subplot(2,2,2);
plot(w/pi,abs(h2));grid
title('时移后序列的幅度谱')
subplot(2,2,3);
plot(w/pi,angle(h1));grid
title('原序列的相位谱')
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,angle(h2));grid
title('时移后序列的相位谱')
```


运行结果如图 5.14 所示。

图 5.14 验证离散时间傅里叶变换 DTFT 时移性的运行结果图

由图 5.14 可见离散时间信号在时域上的时移，其幅度谱不变，只对相位谱造成影响。

```
%验证离散时间傅里叶变换 DTFT 的频移性
clf;
w=-pi:2*pi/255:pi;wo=0.4*pi;D=10;
num1=[1 3 5 7 9 11 13 15 17];
L=length(num1);
h1=freqz(num1,1,w);n= 0:L-1;
num2=exp(wo*i*n).*num1;
h2=freqz(num2,1,w);
subplot(2,2,1);
plot(w/pi,abs(h1));grid
title('原序列的幅度谱')
subplot(2,2,2);
plot(w/pi,abs(h2));grid
title('频移后序列的幅度谱')
subplot(2,2,3);
plot(w/pi,angle(h1));grid
title('原序列的相位谱')
subplot(2,2,4);
plot(w/pi,angle(h2));grid
title('频移后序列的相位谱')
```

运行结果如图 5.15 所示。

图 5.15　验证离散时间傅里叶变换 DTFT 频移性的运行结果图

5.4.3　MATLAB 在 DFT 中的应用

1. 用 MATLAB 计算序列的 DFT

MATLAB 提供了用快速傅里叶变换算法 FFT 计算 DFT 的函数，将在下一章介绍，

这里可以利用 DFT 的定义自己构造一个 DFT 和 IDFT 的函数来计算序列的离散傅里叶变换和反变换。设一个有限长度的序列 $x(n)(0\leqslant n<N-1)$，它的 DFT $X(k)$可以通过在 ω 轴$(0\leqslant\omega<2\pi)$上对 $X(e^{j\omega})$均匀抽样得到

$$X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j2\pi kn/N}\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

$X(k)$的离散傅里叶逆变换(IDFT)为

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(k)W^{-kn}\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

下面是构造离散傅里叶正、反变换函数的 MATLAB 程序，其中 dft(xn，N)为离散傅里叶正变换，idft(xn，N)为离散傅里叶反变换。

```
function[Xk]=dft(xn,N)
            n=[0:1:N-1];k=n;
            WN=exp(-j*2*pi/N);nk=n'*k;WNnk=WN.^nk;Xk=xn*WNnk;
    function[xn]=idft(xn,N)
                n=[0:1:N-1];k=n;
                WN=exp(- j*2*pi/N);nk=n'*k;WNnk= WN.^(-nk);xn= (Xk*WNnk)/N;
```

构造函数后，可以调用函数来计算序列的 DFT 和 IDFT。

2. 用 MATLAB 验证 DFT 的性质

1） 循环移位

定义序列 $x(n)$的 m 单位的循环移位 $y(n)$为

$$y(n)=\tilde{x}(n+m)R_N(n)=x\,((n+m))_N R_N(n)$$

例 5－16 利用 MATLAB 程序求有限长序列 $x(n)=8(0.4)^n$，$0\leqslant n<20$ 的圆周移位

$$x_m(n)=x\,[(n+10)]_{20}R_{20}(n)$$

程序如下：

```
N=20;m=10;n=0:1:N-1;
x=8*(0.4).^n;
n1=mod((n+m),N);% 求余
xm=x(n1+1);%求余后加 1 是因为 MATLAB 向量下标从 1 开始
subplot(2,1,1);
stem(n,x);
title('原序列')
xlabel('n');
ylabel('x(n)');
subplot(2,1,2);
stem(n,xm);
title('圆周移位序列')
xlabel('n');
ylabel('xm(n)');
```

运行结果如图 5.16 所示。



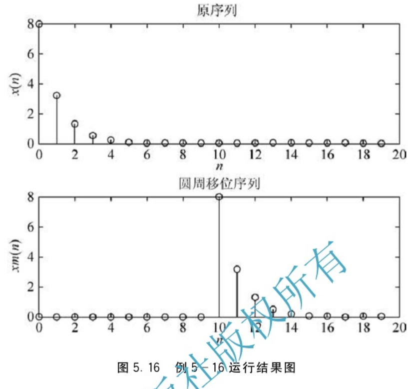


图 5.16 例 5-16 运行结果图

2）循环卷积

MATLAB不存在直接计算循环卷积的函数，要计算两个序列的循环卷积，需要先构造一个循环卷积函数，专门用来计算两个序列(假设均从 0 点开始)的循环卷积。

```
function[y]=circonv(x1,x2)
xn2=[x2(1),fliplr(x2)];
xn2(length(xn2))=[];
C=xn2;R=x2;
M=toeplitz(C,R);
y=x1*M;
```

将函数文件构造好后，即可调用该函数进行循环卷积运算。也可采用快速卷积方法来计算，这在下一章将进行介绍。

本章小结

本章讨论序列的傅里叶分析，序列的频域分析分成两种情况：对于非周期序列可以直接应用傅里叶变换；而对于周期序列，傅里叶变换的直接计算是不收敛的，必须采用离散傅里叶级数间接地得到傅里叶变换。主要内容小结如下。

1. 非周期序列的离散时间傅里叶变换 DTFT 和周期序列的傅里叶分析

包括了 DTFT 的定义和性质、非周期序列的频谱特点、周期序列的离散傅里叶级数的定义及其特点等。

2. 有限长序列的离散傅里叶变换 DFT

包括了 DFT 定义与基本性质、DFT 的对称性、DFT 与其他变换的关系、循环卷积的计算和应用。

3. 基于 MATLAB 语言的离散时间信号频域分析

MATLAB 在离散信号频域分析中的应用及典型例题解析。



知识拓展

一种与卷积十分类似的数学运算就是相关，正像在卷积运算的情况下一样，相关运算涉及两个信号序列。但相对于卷积，在两个信号相关时，目标是衡量两个信号的相似程度，并提取一些很大程度上和应用有关的信息。在雷达、声呐、数字通信、地质和其他的科学和工程领域，信号的相关性分析有很广阔的应用。具体来说，假设有两个需要比较的信号序列 $x(n)$和 $y(n)$，在雷达系统中，$x(n)$一般是发射信号的抽样，而 $y(n)$表示的是接收信号。如果空间中有被雷达或声呐搜索的物体，则接收信号 $y(n)$由发射信号被目标反射并混杂了噪声污染后的延迟信号组成，即 $y(n)=ax(n-D)+w(n)$。如果搜索空间没有目标，则接收信号 $y(n)$仅含有噪声。雷达和声呐探测的目的是比较 $y(n)$和 $x(n)$，判断目标是否存在。如果存在，通过求延迟 D 来确定目标的位置。实际中，信号 $x(n-D)$由于受到加性噪声的严重污染，已经不能从波形上判断目标存在与否，而相关提供这样一种方法。

习　　题

5-1　计算下列各信号的傅里叶变换。

（1）$2^n u[-n]$　　（2）$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+2]$

（3）$\delta[4-2n]$　　（4）$n\left(\frac{1}{2}\right)$

5-2　序列 $x(n)$的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，求下列各序列的傅里叶变换。

（1）$x^*(-n)$　　（2）$\mathrm{Re}[x(n)]$　　（3）$nx(n)$

（4）$x(2n)$　　（5）$x*(n)$　　（6）$g(n)=\begin{cases}x(n/2), & n\ 为偶数\\ 0, & n\ 为奇数\end{cases}$

5-3　已知

$$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_0\\ 0, & \omega_0<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

求 $X(e^{j\omega})$的傅里叶反变换 $x(n)$。

5-4　设 $x(n)=R_4(n)$，$\tilde{x}(n)=x((n))_6$，试求 $\tilde{X}(k)$并作图表示 $\tilde{x}(n)$，$\tilde{X}(k)$。

5-5　设如图 5.17 所示的序列 $x(n)$的 FT 用 $X(e^{j\omega})$表示，不直接求出 $X(e^{j\omega})$，完成下列运算。

（1）$X(e^{j0})$　　（2）$\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega$　　（3）$X(e^{j\pi})$

（4）$\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega$　　（5）$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\mathrm{d}X(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}\right|^2\mathrm{d}\omega$



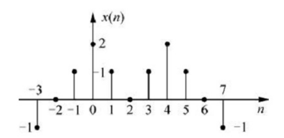


图 5.17　题 5-5 图

5-6　试求如下序列的傅里叶变换。

(1) $x_1(n)=u(n+3)-u(n-4)$

(2) $x_2(n)=\frac{1}{2}\delta(n+1)+\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$；

(3) $x_3(n)=a^n u(n)$，$0<a<1$

5-7　设系统的单位抽样响应 $h(n)=a^n u(n)$，$0<a<1$，输入序列为 $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)$，完成下面各题。

(1) 求出系统输出序列 $y(n)$。

(2) 分别求出 $x(n)$、$h(n)$和 $y(n)$的傅里叶变换。

5-8　计算以下诸序列的 N 点 DFT，在变换区间 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内，序列定义为

(1) $x(n)=\delta(n)$

(2) $x(n)=R_m(n)$，$0<m<N$

(3) $x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}mn)$，$0<m<N$

(4) $x(n)=\sin(\omega_0 n)\cdot R_N(n)$

(5) $x(n)=nR_N(n)$

5-9　已知一个有限长序列 $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-5)$，完成下面各题。

(1) 求它的 10 点离散傅里叶变换 $X(k)$。

(2) 已知序列 $y(n)$的 10 点离散傅里叶变换为 $Y(k)=W_{10}^{2k}X(k)$，求序列 $y(n)$。

(3) 已知序列 $m(n)$的 10 点离散傅里叶变换为 $M(k)=X(k)Y(k)$，求序列 $m(n)$。

5-10　长度为 8 的有限长序列 $x(n)$的 8 点 DFT 为 $X(k)$，长度为 16 的一个新序列定义为

$$y(n)=\begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right),\ n=0,2,\cdots 14 \\ 0,\ n=1,3,\cdots,15 \end{cases}$$

试用 $X(k)$来表示 $Y(k)=\mathrm{DFT}[y(n)]$。

5-11　设 $X(k)$表示长度为 N 的有限长序列 $x(n)$的 DFT。

(1) 证明如果 $x(n)$满足关系式 $x(n)=-x(N-1-n)$，则 $X(0)=0$。

(2) 证明当 N 为偶数时，如果 $x(n)=x(N-1-n)$，则 $X(\frac{N}{2})=0$。

5-12　$x(n)$长为 N 的有限长序列，其 N 点 DFT 为 $X(k)$。$x_{ep}(n)$，$x_{op}(n)$分别为 $x(n)$的共轭对称分量及共轭反对称分量，也即

$$x_{ep}(n)=x_{ep}^*(N-n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(N-n)]$$

$$x_{op}(n)=-x_{op}^*(N-n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(N-n)]$$

证明 $\mathrm{DFT}[x_{ep}(n)]=\mathrm{Re}[X(k)]$，$\mathrm{DFT}[x_{op}(n)]=\mathrm{jIm}[X(k)]$。

5-13 已知 $x(n)=n+1(0\leqslant n\leqslant 3)$，$y(n)=(-1)^n(0\leqslant n\leqslant 3)$，用圆周卷积法求 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的线性卷积 $z(n)$。

5-14 长度为 $N=10$ 的两个有限长序列

$$x_1(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & 5\leqslant n\leqslant 9\end{cases},\quad x_2(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ -1, & 5\leqslant n\leqslant 9\end{cases}$$

作图表示 $x_1(n)$、$x_2(n)$ 和 $y(n)=x_1(n)⑩x_2(n)$。

5-15 已知 $x(n)$ 是长度为 N 的有限长序列，$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$，现将 $x(n)$ 的每两点之间补进 $r-1$ 个零值，得到一个长为 rN 的有限长序列 $y(n)$

$$y(n)=\begin{cases}x(n/r), & n=ir,\ i=0,1,\cdots,N-1\\ 0, & n\neq ir,\ i=0,1,\cdots,N-1\end{cases}$$

求：$\mathrm{DFT}[y(n)]$ 与 $X(k)$ 的关系。

5-16 两个有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)$ 的零值区间为

$$x(n)=0,\ n<0,\ 8\leqslant n$$
$$y(n)=0,\ n<0,\ 20\leqslant n$$

对每个序列作 20 点 DFT，即

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)],\ k=0,1,\cdots,19$$
$$Y(k)=\mathrm{DFT}[y(n)],\ k=0,1,\cdots,19$$

如果

$$F(k)=X(k)\cdot Y(k),\ k=0,1,\cdots,19$$
$$f(n)=\mathrm{IDFT}[F(k)],\ k=0,1,\cdots,19$$

试问在哪些点上 $f(n)=x(n)*y(n)$，为什么？

5-17 我们希望利用 $h(n)$ 长度为 $N=50$ 的 FIR 滤波器对一段很长的数据序列进行滤波处理，要求采用重叠保留法通过 DFT 来实现。所谓重叠保留法，就是对输入序列进行分段(本题设每段长度为 $M=100$ 个采样点)，但相邻两段必须重叠 V 个点，然后计算各段与 $h(n)$ 的 L 点(本题取 $L=128$)循环卷积，得到输出序列 $y_m(n)$，m 表示第 m 段计算输出。最后，从 $y_m(n)$ 中取出 B 个，使每段取出的 B 个采样点连接得到滤波输出 $y(n)$。

(1) 求 V。

(2) 求 B。

(3) 确定取出的 B 个采样应为 $y_m(n)$ 中的哪些采样点。

5-18 令 $X(k)$ 表示 N 点的序列 $x(n)$ 的 N 点离散傅里叶变换，$X(k)$ 本身也是一个 N 点的序列。如果计算 $X(k)$ 的离散傅里叶变换得到一个序列 $x_1(n)$，试用 $x(n)$ 求 $x_1(n)$。

第 6 章

快速傅里叶变换

本章教学要求

➢ 掌握直接计算 DFT 的特点及减少运算量的基本途径。

➢ 理解时间抽取基-2FFT 算法和频率抽取基-2FFT 算法思想和特点。

➢ 理解快速傅里叶变换相关 MATLAB 函数应用及典型例题的解析。



推荐阅读资料

[1] 程佩青．数字信号处理教程[M]．3 版．北京：清华大学出版社，2007.

[2] [美]Oppenheim A V，Schafer R W．数字信号处理[M]．董士嘉，译．北京：科学出版社，1981.

[3] 李芬华，常铁原，潘立冬．数字信号处理[M]．北京：中国计量出版社，2007.

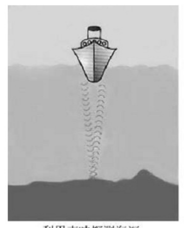
[4] [美]Richard G.Lyons．数字信号处理[M]．3 版．朱光明，等译．北京：电子工业出版社，2012.

[5] 刘兴钊．数字信号处理教程[M]．北京：电子工业出版社，2010.



引例：FFT 算法的引入

DFT 是信号分析与处理中的一种重要变换，它是确定一个时域序列的频谱内容的数学方法，因直接计算 DFT 的计算量与变换区间长度 N 的平方成正比，当 N 较大时，计算量太大，所以在快速傅里叶变换(简称 FFT)出现以前，直接用 DFT 算法进行谱分析和信号的实时处理是不切实际的，直到 1965 年人们发现了 DFT 的一种快速算法以后，情况才发生了根本的变化，人们开始认识到 DFT 运算的一些内在规律，从而很快地发展和完善了一套告诉有效的运算方法——快速傅里叶(FFT)算法。FFT 的出现，使 DFT 的运算大大简化，运算时间缩短一至二个数量级，使 DFT 运算在实际中得到广泛应用，例如声呐探测，声呐是英文缩写“SONAR”的音译，其中文全称为声音导航与测距，Sound Navigation And Ranging”是一种利用声波在水下的传播特性，通过电声转换和信息处理，完成水下探测和通信任务的电子设备，如图 6.1 所示。它有主动式和被动式两种类型，属于声学定位的范畴。声呐是利用水中声波对水下目标进行探测、定位和通信的电子设备，是水声学中应用最广泛、最重要的一种装置。



利用声呐探测海深　　利用声呐探测鱼群

图 6.1　声呐原理图

6.1　直接计算 DFT 的问题及分解方法

6.1.1　直接计算 DFT 的特点

长度为 N 的有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1 \tag{6-1}$$

由上式可见，考虑 $x(n)$ 为复数序列的一般情况，对某一个 k 值，直接计算 $X(k)$ 值需要 N 次复数乘法、$(N-1)$ 次复数加法。$X(k)$ 一共有 N 个点，故完成全部 DFT 运算，即要计算 DFT 的所有 $N(k=0,\ \cdots,\ N-1)$ 个值，则需要

(1) N^2 复数乘法。

(2) $N(N-1)$ 复数加法。

在这些运算中，(机器运算)乘法比加法复杂，需要的运算时间多，尤其是复数相乘，每次复数相乘包括 4 个实数相乘和 2 个实数相加。从上面分析看到，在 DFT 计算中，不论是乘法还是加法，运算量均与 N^2 成正比，因此 N 较大时，运算量十分可观。

例如，一个长度为 N 的复值序列 $x(n)$，当 $N=10$，直接计算 $x(n)$ 的 N 点 DFT 包含 100 次复数乘法；当 $N=1024$，直接计算 $x(n)$ 的 N 点 DFT 包含 1048576 次复数乘法。

由于 DFT 和 IDFT 基本上包含相同类型的计算(IDFT 只是多乘一个常数 $1/N$，所以二者计算量相同)，因此关于 DFT 有效计算算法的讨论也适用于 IDFT 的有效计算。

6.1.2　DFT 的分解方法

考察 DFT 与 IDFT 的运算发现利用以下两个方面可减少运算量。

1. 相位因子(Phase Factor)W_N 的 3 个性质

$$\text{周期性：}W_N^{m+lN}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(m+lN)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}(m)}=W_N^m \tag{6-2}$$

$$对称性：W_N^{-m}=W_N^{N-m} \text{ 或 } [W_N^{N-m}]^*=W_N^m \tag{6-3}$$

$$可约性：W_N^{m+\frac{N}{2}}=-W_N^m \tag{6-4}$$

$$W_N^{mn}=W_{N/m}^n \tag{6-5}$$

利用这些性质，使 DFT 运算中有些项可以合并。

2. 分解

把计算长度为 N 的序列的离散傅里叶变换逐次分解成计算长度较短的序列的离散傅里叶变换。可以利用 W_N 的周期性和对称性，把长度为 N 点的大点数的 DFT 运算依次分解为若干小点数的 DFT。因为 DFT 的计算量正比于 N^2，N 小则计算量也小。FFT 的算法思想就是将长序列 DFT 分解成几个短序列的 DFT。

例如，N 能够分解为两个整数之积 $N=LM$ 即 $L=N/M$。将一个 N 点 DFT 分解为 M 个 N/M 点 DFT，这样复乘法次数为

$$(N/M)^2\times M=N^2/M$$

由此，运算量下降为原来的 $1/M$。FFT 算法正是基于这样的基本思想发展起来的。它有多种形式，本章要介绍的基 2－FFT 算法是最基本且最常用的快速算法，它可以分为两类：时间抽取法 FFT(Decimation－IN－Time FFT ，DIT－FFT)和频域抽取法 FFT (Decimation－IN－frequency FFT ，DIF－FFT)。然而，并不是直接把分解后的小点数 DFT 加在一起就可以得到所求的大点数 DFT。需要找到它们之间的关系，才能由小点数的 DFT 得到其大点数的 DFT。

6.2 时域抽取法基－2FFT 算法

6.2.1 基本原理

设 $x(n)$是一个长度为 N 的有限长序列，$N=2^M$，$M>0$ 且 M 为整数

如果不满足这个条件，可以人为地加上若干零值点，使之达到这一要求。这种 N 为 2 的整数幂的 FFT 称基-2FFT。

按 n 的奇偶把 $x(n)$分解为两个 $N/2$ 点的子序列：

$$x_1(r)=x(2r),\ r=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{2}-1 \tag{6-6}$$

$$x_2(r)=x(2r+1),\ r=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{N}{2}-1 \tag{6-7}$$

则 $x(n)$的 N 点 DFT 为

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=\text{偶数}}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=\text{奇数}}x(n)W_N^{kn}\\&=\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r)W_N^{2kr}+\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r+1)W_N^{k(2r+1)}\\&=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)W_N^{2kr}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)W_N^{2kr}\end{aligned}$$

根据相位因子的可约性可知 $W_N^{2kr}=W_{N/2}^{kr}$，所以

$$X(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)W_{N/2}^{kr}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)W_{N/2}^{kr}$$
$$=X_1(k)+W_N^kX_2(k)k=0,1,\cdots,N-1 \tag{6-8}$$

其中 $X_1(k)$和 $X_2(k)$分别为 $x_1(r)$和 $x_2(r)$的 $N/2$ 点 DFT，即

$$X_1(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_1(r)W_{N/2}^{kr}=\text{DFT}[x_1(r)]_{N/2} \tag{6-9}$$

$$X_2(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x_2(r)W_{N/2}^{kr}=\text{DFT}[x_2(r)]_{N/2} \tag{6-10}$$

由于 $X_1(k)$和 $X_2(k)$均以 $N/2$ 为周期，即

$$X_1(k+N/2)=X_1(k)\text{ 以及 }X_2(k+N/2)=X_2(k)$$

此外，由于 $W_N^{k+\frac{N}{2}}=-W_N^k$，因此式(6-8)可以表示为

$$X(k)=X_1(k)+W_N^kX_2(k)\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{6-11}$$

$$X(k+\frac{N}{2})=X_1(k)-W_N^kX_2(k)\quad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{6-12}$$

可见，一个 N 点的 DFT 被分解为两个 $N/2$ 点的 DFT $X_1(k)$和 $X_2(k)$，这两个 $N/2$ 点的 DFT 再由上两式计算合成为一个 N 点 DFT，即只要求出 0 到$(N/2-1)$区间的所有$X_1(k)$和 $X_2(k)$值，就可以求出 $0\sim N-1$ 区间内所有的 $X(k)$值，这大大节省了运算。现在分析一下经过这样的一次分解后，运算量有什么变化：直接计算 $X_1(k)$需要$(N/2)^2$次复数乘法；直接计算 $X_2(k)$需要$(N/2)^2$次复数乘法；直接计算 $W_N^kX_2(k)$需要 $N/2$ 次复数乘法。因此计算 $X(k)$需要 $2(N/2)^2+N/2=N^2/2+N/2$ 次复数乘法，而原来的直接运算需要 N^2次复数乘法，因此对于大的 N，乘法运算次数大约减少了 1/2。

6.2.2 FFT 的信号流图

1. 蝶形运算

为了将上面的分解过程用运算流图表示，以便估算其运算规律总结编程方法，先介绍一种蝶式信号流图(又称蝶式运算)，将式(6-11)和式(6-12)的运算可归结为

$$\begin{cases}a-bW\\a+bW\end{cases}$$

如图 6.2 所示，该基本运算因流图类似于一只蝴蝶，故称为蝶形运算，也称蝶形结。设 a、b、W 均为复数，则完成一个蝶形运算就包含一次复数乘法和两次复数加法。

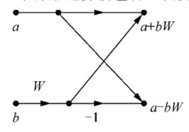


图 6.2 基本蝶形运算

2. DIT－FFT 信号流图

采用蝶形结构，可以将前面所讨论的分解过程用流图表示。下面以 8 点 DFT 为例，将 DIT－FFT 的分解过程采用蝶形结构表示为图 6.3 所示。

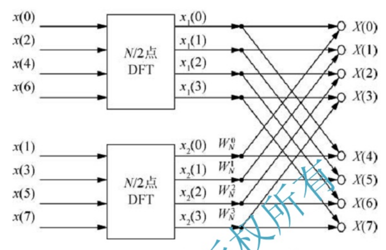


图 6.3　第一次时域奇偶抽取分解的运算流图

由前面的分析可知，这样一次分解可以将运算工作量差不多减少到一半，既然如此，按照上面的方法，继续把 $N/2$ 用 2 去除。由于 $N=2^M$，$N/2$ 仍然是偶数，可以被 2 整除，因此可以对 $N/2$ 点的 DFT 再分别作进一步的分解。既对$\{X_1(k)\}$和$\{X_2(k)\}$进行计算，又可以分别通过计算两个长度为 $N/4$ 点的 DFT，进一步节省计算量，其分解过程如图 6.4 所示。

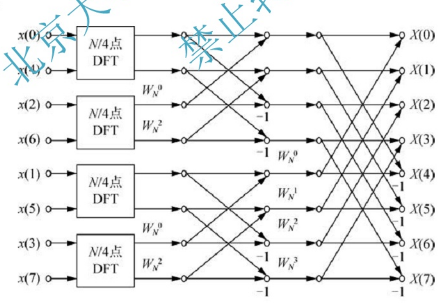


图 6.4　第二次时域奇偶抽取分解的运算流图

这样经过第二次分解，又将两个 $N/2$ 点 DFT 各分解成两个 $N/4$ 点 DFT。以此类推，经过 M 次分解，最后将 N 点 DFT 分解成 N 个 1 点 DFT 和 M 级蝶形运算，而 1 点 DFT 就是时域序列本身。一个完整的 8 点 DIT－FFT 运算流图如图 6.5 所示。

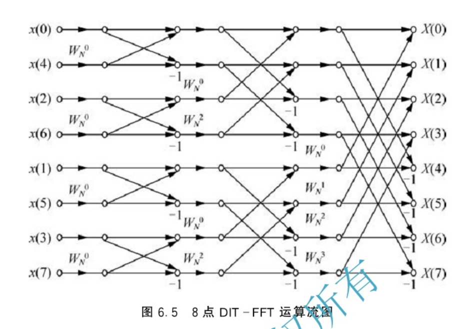


图 6.5　8 点 DIT－FFT 运算流图

由于这种方法每一步分解都是按输入时间序列是属于偶数还是奇数来抽取的，所以称为“按时间抽取法”或“时间抽取法”。



小知识：

信号流图是借助拓扑图形求线性代数方程组解的一种方法。由美国麻省理工学院的 S.J. 梅森(Mason)于 1953 年提出，故又称梅森图。这一方法能将各有关变量的因果关系在图中明显地表示出来，常用于分析线性系统，例如，求它们的传递函数。

6.2.3　DIT－FFT 算法与直接计算 DFT 运算量(计算复杂度)的比较

对于 $N=2^M$，由 DIT－FFT 的运算流图可见，其共有 $M=\log_2 N$ 级蝶形，每级由 $N/2$ 个蝶形运算组成，即每一级运算都需要 $N/2$ 次复数乘和 N 次复数加(每个蝶形需要两次复数加法)。所以，M 级运算总共需要

$$\text{复数乘法：} C_M(2)=\frac{N}{2}\cdot M=\frac{N}{2}\log_2 N \tag{6-13}$$

$$\text{复数加法：} C_A(2)=N\cdot M=N\log_2 N \tag{6-14}$$

而直接计算 DFT 需要复数乘法 N^2 次和复数加法 $N(N-1)$次。当 $N\gg 1$ 时，$N^2\gg\frac{N}{2}\log_2 N$。例如，$N=2^{10}=1024$ 时

$$\frac{N^2}{(N/2)\log_2 N}=\frac{1048576}{5120}=204.8$$

可见，DIT－FFT 使得运算效率提高了 200 多倍。图 6.6 为 FFT 算法和直接计算 DFT 所需复数乘法次数 C_M 与点数 N 的关系曲线图。由图可以更加直观地看出 FFT 算法的优越性，尤其是 N 越大，其优势越明显。

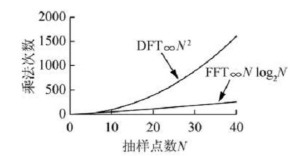


图 6.6　直接计算 DFT 与 FFT 算法所需乘法次数比较

6.2.4　DIT－FFT 的运算规律

为了得出任何 $N=2^M$ 点的 DIT－FFT 信号流图，以便写出相应的运算程序，下面总结 DIT－FFT 运算的运算规律。

1. 原位计算

由图 6.5 可以看出，DIT－FFT 的运算具有规律性。若 $N=2^M$，其运算包含 M 级运算，每级由 $N/2$ 个蝶形组成，每个蝶形运算结构为

$$\begin{cases} a-bW=A \\ a+bW=B \end{cases}$$

可见对每个蝶形运算，一旦完成复数对(a，b)上的运算并产生(A，B)时，则没有必要继续保留输入对(a，b)。因此可以在存储(a，b)的相同位置上存储(A，B)。从而，为了存储每一级的计算结果(N 个复数)，只要求一个定量的存储空间，即 $2N$ 个存储寄存器。因为在 N 点 DFT 计算的整个期间只使用了相同的 $2N$ 个存储单元，故称计算机为同址实现。当数据输入到存储器中以后，每一级运算结果仍然存储在同一组存储中，直到最后输出，中间无须其他存储器，称为原位计算。每一级运算均可在原位进行，这种原位运算结构可节省存储单元，降低设备成本，还可以节省寻址时间。

2. 抽取后的输入序列按倒序存储

由图 6.5 看出，对按时间抽取 FFT 的原位运算结构，当运算完毕时，正好顺序存放着 $X(0)$，$X(1)$，…，$X(N-1)$，即可直接按顺序输出，但是这种原位运算的输入 $x(n)$ 却不能按这种自然顺序存入存储单元，而是看起来似乎相当杂乱，实际上它也是有规律的，即倒位序。通过按二进制形式表示序列 $x(n)$的下标 n，我们注意到，按倒序读下标 n 的二进制表示式，就能轻易地抽取序列的次序，也就是说，当用二进制表示这个顺序时，它正好是“码位倒置”的顺序，如图 6.7 所示。


小知识：

在实际运算中，如果直接将输入数据 $x(n)$按“码位倒置”的顺序排好很不方便，一般总是先按自然顺序输入存储单元，然后再通过变址运算将自然顺序的存储转换为码位倒置顺序的存储，然后进行 FFT 的原位运算。目前有许多通用 DSP 芯片支持这种“码位倒置”的寻址功能。

造成倒序的原因是输入 $x(n)$ 按标号 n 的奇偶不断分组而成的。若 $N=2^M$，如图 6.7 所示，设顺序数用二进制数表示为 $n_{m-1}n_{m-2}\cdots n_1n_0$（$N=8$ 时，表示为 $n_2n_1n_0$），第一次分组根据 n 的最低位 n_0 为 0 对应 $x(n)$ 的偶数组和最低位 n_0 为 1 对应 $x(n)$ 的奇数组，将 $x(n)$ 分为偶奇两组。第二次按次低位 n_1 的 0 和 1 来分偶奇组。依此类推，第 M 次按 n_{m-1} 位的 0 和 1 分组，这种不断分成偶数子序列和奇数子序列的过程得到了二进制的倒序数。

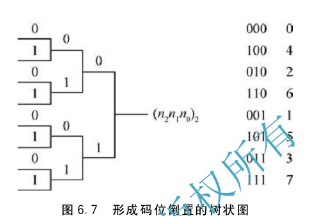


图 6.7　形成码位倒置的树状图

3. 相位因子 W_N^r 的变化规律

如前所述，N 点 DIT－FFT 运算流图的每一级运算都包含有 $N/2$ 个蝶形，但是每一级的蝶形特点不同，不同蝶形的两个输入数据点的间隔及旋转因子 W_N^r 的类型会有所不同，如图 6.5 所示，各级的蝶形特点如下。

设 $N=8$，则包含 3 级运算。

第一级：一种类型的旋转因子 $W_N^r \to W_8^0$，间隔为 1；

第二级：两种类型的旋转因子 $W_N^r \to W_8^0$，W_8^2，间隔为 2；

第三级：四种类型的旋转因子 $W_N^r \to W_8^0$，W_8^1，W_8^2，W_8^3，间隔为 4。

对 $N=2^M$ 的一般情况，总结其各级蝶形规律如下。

规律一：如果 $N=2^M$，则 DIT－FFT 包含 M 级运算，每一级均包含 $N/2$ 个蝶形，每个蝶形的两个输入数据点的间隔为 2^{L-1}（L 为运算的级数）。

规律二：如果 $N=2^M$，则第 L 级运算包含 2^{L-1} 种类型的 W_N^r，

式中：$r=J\times 2^{M-L}$，$(J=0，1，2，\cdots，2^{L-1}-1)$。　　(6－15)

注意：上面的结论可以通过严格的数学推导得到，这里只给出了相应的结论，省略了推导过程。

6.3　频域抽取法基－2FFT 算法

在基－2FFT 快速算法中，频域抽取法 FFT 也是一种常用的快速算法，简称 DIF－FFT，它是按输出 $X(k)$ 在频域的顺序上是属于偶数还是奇数进行分解的。

对于频率抽取法，输入序列不是按偶数奇数，而是按前后对半分开，这样便将 N 点 DFT 写成前后两部分。

设 $x(n)$ 是一个长度为 N 的有限长序列，$N=2^M$，$M>0$ 且 M 为整数

$$\begin{aligned}X(k)&=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{kn}\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=0}^{N/2-1}x(n+\frac{N}{2})W_N^{k(n+N/2)}\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+W_N^{kN/2}x(n+\frac{N}{2})]W_N^{kn}，k=0，1，\cdots，N-1\end{aligned}\tag{6-16}$$

由于 $W_N^{N/2}=-1$，所以式(6-16)中

$$W_N^{kN/2}=(-1)^k=\begin{cases}1，k=\text{偶数}\\-1，k=\text{奇数}\end{cases}\tag{6-17}$$

可得

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+(-1)^k x(n+N/2)]W_N^{kn}，k=0，1，\cdots，N-1\tag{6-18}$$

按 k 的奇偶可将 $X(k)$ 分解成偶数组和奇数组。令

$$k=\begin{cases}2r，k\text{ 为偶数}\\2r+1，k\text{ 为奇数}\end{cases}，r=0，1，\cdots，N/2-1$$

则

$$\begin{aligned}X(2r)&=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+x(n+N/2)]W_N^{2rn}\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)+x(n+N/2)]W_{N/2}^{rn}\end{aligned}\tag{6-19}$$

$$\begin{aligned}X(2r+1)&=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)-x(n+N/2)]W_N^{(2r+1)n}\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}[x(n)-x(n+N/2)]W_N^{n}W_{N/2}^{rn}\end{aligned}\tag{6-20}$$

令

$$\left.\begin{aligned}x_1(n)&=x(n)+x(n+N/2)\\x_2(n)&=[x(n)-x(n+N/2)]W_N^n\end{aligned}\right\}，n=0，1，\cdots，N/2-1\tag{6-21}$$

其中 $x_1(n)$ 是 $x(n)$ 的前一半和后一半之和组成的序列，其长度为 $N/2$，$x_2(n)$ 是 $x(n)$ 的前一半和后一半之差再与 W_N^n 之积组成的长度为 $N/2$ 的序列。将式(6-21)代入式(6-19)和式(6-20)，得到

$$\left.\begin{aligned}X(2r)&=\sum_{n=0}^{N/2-1}x_1(n)W_{N/2}^{rn}\\X(2r+1)&=\sum_{n=0}^{N/2-1}x_2(n)W_{N/2}^{rn}\end{aligned}\right\}，r=0，1，\cdots，N/2-1\tag{6-22}$$

由式(6-22)可见，$X(k)$的偶数组是$x_1(n)$的$N/2$点DFT，奇数组则是$x_2(n)$的$N/2$点DFT。$x_1(n)$、$x_2(n)$和$x(n)$之间的关系可以用图6.8所示的蝶形运算流图符号表示，与DIT-FFT相同，该蝶形也包含一次复数乘法和两次复数加法。

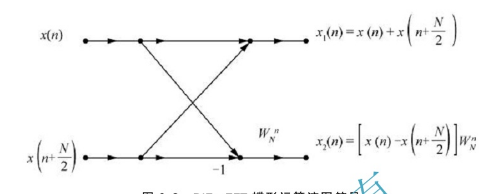


图6.8 DIF-FFT蝶形运算流图符号

若$N=8$，第一次分解的运算流图如图6.9所示。

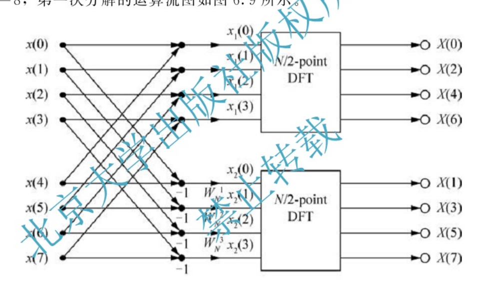


图6.9 DIF-FFT第一次分解运算流图($N=8$)

与DIT-FFT类似，由于$N=2^M$，$N/2$仍然是偶数，可以被2整除，因此可以对$N/2$点的DFT的输出再分别作进一步的分解，又可以分别通过计算两个长度为$N/4$点的DFT，进一步节省计算量。这两个$N/4$点DFT的输入也是先将$N/2$点DFT的输入上下对半分开后，通过图6.8所示的蝶形运算形成的，其分解过程如图6.10所示。

这样继续分解下去，若$N=2^M$，经过$M-1$次分解，最后分解为2^{M-1}个两点DFT，两点DFT就是一个基本的蝶形运算。当$N=8$时的完整DIF-FFT运算流图如图6.11所示。

由图6.11所示可知DIF-FFT与DIT-FFT算法类似，也是原位计算，若$N=2^M$，则包含M级运算，每级包含$N/2$个蝶形运算，所以运算次数与DIT-FFT完全相同。不同的是两者的蝶形结构不同，DIT-FFT的蝶形先乘后加(减)，DIF-FFT的蝶形先加(减)后乘。此外两者输入输出序列的排序不同，DIF-FFT算法输入序列是自然顺序，而输出为倒序排列。实际上DIT-FFT与DIF-FFT的基本蝶形是互为转置的关系，因此两

种方法的运算流图也是互为转置的关系。

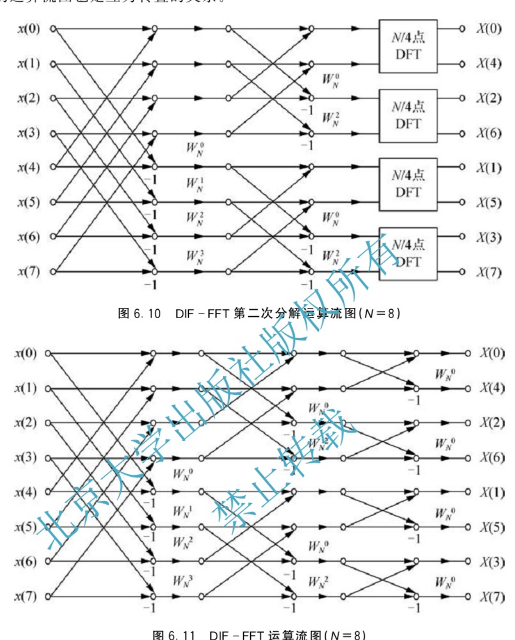


图 6.10　DIF－FFT 第二次分解运算流图($N=8$)

图 6.11　DIF－FFT 运算流图($N=8$)

6.4　IDTFT 的高效算法——IFFT

上节所述 FFT 算法流图也可以用于离散傅里叶逆变换，比较 DFT 和 IDFT 的运算公式：

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{kn}\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W^{-kn}\quad 0\leqslant n\leqslant N-1$$

从比较中可以看出，IDFT 与 DFT 计算的差别在于以下两方面。



(1) 用 W_N^{-nk} 代替 DFT 计算中的 W_N^{nk}。

(2) 乘以系数 $1/N$。

由于对计算机而言，无论输入的是 $x(n)$ 或 $X(k)$，它们都是代表一些序列值，因此以上所讨论的时间抽取或频率抽取的 FFT 运算均可直接用于 IDFT 运算，即 IFFT。当然，蝶形中的系数 W_N^{nk} 应改为 W_N^{-nk}。

除了上述这种 IFFT 算法外，我们还可以直接利用 FFT 来计算 IDFT。首先将 IDFT 公式取共轭

$$x^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W^{kn}\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{6-23}$$

再在式(6-23)等号两边再取共轭，可得

$$x(n)=\frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1}X^*(k)W^{kn}\right]^*=\frac{1}{N}\{\mathrm{DFT}[X^*(k)]\}^* \tag{6-24}$$

由此可见，可以先将 $X(k)$ 取共轭，然后直接调用 FFT 子程序进行 DFT 运算，最后再对运算结果取共轭，并乘以 $1/N$，就可以得到 $x(n)$。该方法计算 IFFT 可以与 FFT 共用同一个子程序，这样使用起来就会非常方便。

6.5 FFT 算法的应用

6.5.1 实序列的 FFT 算法

前面讨论的 FFT 算法都是复数运算，包括序列 $x(n)$ 也认为是复数，但大多数场合，信号是实数序列，但任何实数都可看成虚部为零的复数。例如，求某实信号 $x(n)$ 的频谱，可认为是将实信号加上数值为零的虚部变成复信号 $\{x(n)+\mathrm{j}0\}$，再用 FFT 求其离散傅里叶变换。这种做法很不经济，因为把实序列变成复序列，存储器要增加一倍，且计算机运行时，即使虚部为零，也要进行涉及虚部的运算，浪费了运算量。合理的解决方法是利用复数据 FFT 对实数据进行有效计算。下面介绍两种方法。

1. 两个实序列的 N 点 DFT 的有效计算

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个长度为 N 的实序列，令序列 $x(n)$ 为一个复值序列：

$$x(n)=x_1(n)+\mathrm{j}x_2(n)\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{6-25}$$

由于 DFT 运算的线性特性，因此 $x(n)$ 的 N 点 DFT 可表示为

$$X(k)=X_1(k)+\mathrm{j}X_2(k) \tag{6-26}$$

其中序列 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 可表示为

$$x_1(n)=\frac{x(n)+x^*(n)}{2} \tag{6-27}$$

$$x_2(n)=\frac{x(n)-x^*(n)}{2\mathrm{j}} \tag{6-28}$$

因此 $x_1(n)$ 与 $x_2(n)$ 的 DFT 为

$$X_1(k)=\frac{1}{2}\{\mathrm{DFT}[x(n)]+\mathrm{DFT}[x^*(n)]\} \tag{6-29}$$

$$X_2(k)=\frac{1}{2\mathrm{j}}\{\mathrm{DFT}[x(n)]-\mathrm{DFT}[x^*(n)]\} \tag{6-30}$$

回顾 DFT 的性质，$x^*(n)$的 DFT 为 $X^*(N-k)$，
因此

$$X_1(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)] \tag{6-31}$$

$$X_2(k)=\frac{1}{2\mathrm{j}}[X(k)-X^*(N-k)] \tag{6-32}$$

也就是说，作一次 N 点复序列的 FFT，再通过式(6-31)与式(6-32)的加、减运算就可以将 $X_1(k)$和 $X_2(k)$分离出来。显然，这将使运算效率提高一倍。

2. 用一个 N 点的 FFT 运算获得一个 $2N$ 点实序列的 DFT

设 $g(n)$是一个长度为 $2N$ 的实序列，现在需要推导如何用一个 N 点复值 FFT 运算获得一个 $2N$ 点实序列的 DFT 。

首先定义

$$x_1(n)=g(2n),\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{6-33}$$

$$x_2(n)=g(2n+1),\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{6-34}$$

取 $g(n)$的偶数点和奇数点分别作为新构造序列 $x(n)$的实部和虚部，即将 $2N$ 点实序列 $g(n)$分成两个 N 点实序列 $x_1(n)$与 $x_2(n)$，再构造成一个 N 点的复序列 $x(n)$：

$$x(n)=x_1(n)+\mathrm{j}x_2(n) \tag{6-35}$$

由前面推导出来的结果式(6-31)和式(6-32)可以得到

$$X_1(k)=\frac{1}{2}[X(k)+X^*(N-k)]$$

$$X_2(k)=\frac{1}{2\mathrm{j}}[X(k)-X^*(N-k)]$$

接下来，必须用两个 N 点 DFT$X_1(k)$和 $X_2(k)$来表示所要求的 $2N$ 点 DFT$G(k)$，为了实现这一点，可以按照时间抽取 FFT 的分解方法进行。

因为

$$\begin{aligned}G(k)&=\sum_{n=0}^{2N-1}g(n)W_{2N}^{nk}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}g(2n)W_{2N}^{2nk}+\sum_{n=0}^{N-1}g(2n+1)W_{2N}^{(2n+1)k}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)W_{2N}^{2nk}+W_{2N}^{k}\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)W_{2N}^{2nk}\\&=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)W_{N}^{nk}+W_{2N}^{k}\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)W_{N}^{nk}\end{aligned} \tag{6-36}$$

又因为

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)W_N^{nk}$$

$$X_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)W_N^{nk}$$

所以

$$G(k)=X_1(k)+W_{2N}^{k}X_2(k) \tag{6-37}$$

因而

$$G(k)=X_1(k)+W_{2N}^{k}X_2(k),\ k=0,1,\cdots,N-1 \tag{6-38}$$

$$\begin{aligned}G(k+N)&=X_1(k+N)+W_{2N}^{k+N}X_2(k+N)\\&=X_1(k)-W_{2N}^{k}X_2(k),\ k=0,1,\cdots N-1\end{aligned} \tag{6-39}$$

其中，根据 DFT 和相位因子的周期性

$$X_1(k+N)=X_1(k) \qquad X_2(k+N)=X_2(k) \qquad W_{2N}^{k+N}=-W_{2N}^{k}$$

由此可以利用式(6-38)和式(6-39)用一个 N 点复值 FFT 运算获得一个 $2N$ 点实序列的 DFT 。

6.5.2 FFT 算法在相关运算中的应用

一种与卷积十分类似的数学运算就是相关，正像在卷积运算的情况下一样，相关运算涉及两个信号序列。但相对于卷积，在两个信号相关时，其目标是衡量两个信号的相似程度，并提取一些很大程度上和应用有关的信息。在雷达、声呐、数字通信、地质和其他的科学和工程领域，信号的相关性分析有很广阔的应用。具体来说，假设有两个需要比较的信号序列 $x(n)$和 $y(n)$，在雷达系统中，$x(n)$一般是发射信号的取样，而 $y(n)$表示的是接收信号。如果空间中有被雷达或声呐搜索的物体，则接收信号 $y(n)$由发射信号被目标反射并混杂了噪声污染后的延迟信号组成，即 $y(n)=ax(n-D)+w(n)$。如果搜索空间没有目标，则接收信号 $y(n)$仅含有噪声。雷达和声呐探测的目的是比较 $y(n)$和 $x(n)$，判断目标是否存在。如果存在，通过求延迟 D 来确定目标的位置。实际中，信号 $x(n-D)$由于受到加性噪声的严重污染，已经不能从波形上判断目标存在与否，而相关提供这样一种方法。

设两个有限能量实信号序列 $x(n)$和 $y(n)$。$x(n)$与 $y(n)$ 的相关为序列 $r_{xy}(\tau)$，其定义为

$$r_{xy}(\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n-\tau)y(n),\ \tau=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{6-40}$$

或

$$r_{xy}(\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(n+\tau) \tag{6-41}$$

可以证明

$$R_{xy}(k)=X^*(k)Y(k) \tag{6-42}$$

这里 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]_N$，$Y(k)=\text{DFT}[y(n)]_N$，$R_{xy}(k)=\text{DFT}[r_{xy}(\tau)]_N$。

设

$$r_{xy}(\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n-\tau)y(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(n+\tau)$$

$$f(n)=x(n)*y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(n-m)y(m)$$

则

$$f(\tau)=\sum_{m=0}^{N-1}x(\tau-m)y(m) \tag{6-43}$$

对比相关的定义式，可以得到相关与线性卷积的关系为

$$\begin{aligned}r_{xy}(\tau)&=\sum_{n=0}^{N-1}x(n-\tau)y(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x[-(\tau-n)]y(n)\\&=x(-\tau)*y(m),\ \tau=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\end{aligned} \tag{6-44}$$

由 DFT 的性质可得

$$\mathrm{DFT}[x(-\tau)]=\mathrm{DFT}[x((-n))_N R_N(n)]=X^*(k) \tag{6-45}$$

从上式看出，可以利用线性卷积与循环卷积的关系来计算相关性。

6.6 基于 MATLAB 语言的快速傅里叶变换

在 MATLAB 中，使用函数 fft 可以很容易地计算有限长序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$。此函数有两种形式：fft(x)和 fft(x，L)。fft(x)计算序列 $x(n)$ 的离散傅里叶变换 $X(k)$，这里 $X(k)$ 的长度与 $x(n)$ 的长度相等。fft(x，L)计算序列 $x(n)$ 的 L 点离散傅里叶变换，其中 $L \geqslant N$。若 $L>N$，在计算离散傅里叶变换之前，对 $x(n)$ 尾部的 $L-N$ 个值进行补零。同样，离散傅里叶变换序列 $X(k)$ 的离散傅里叶逆变换 $x(n)$ 用函数 ifft 计算，它也有类似的两种形式。

1. 利用函数 fft 计算基本序列的离散傅里叶变换

N 点离散傅里叶变换的一种物理解释就是，$X(k)$ 是 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列的离散傅里叶级数系数 $\tilde{X}(k)$ 的主值区间序列，即 $X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$。例如，序列 $\cos(\frac{\pi}{8}n)R_N(n)$，当 $N=16$ 时，$\cos(\frac{\pi}{8}n)R_N(n)$ 正好是 $\cos(\frac{\pi}{8}n)$ 的一个周期，所以 $\cos(\frac{\pi}{8}n)R_N(n)$ 的周期延拓序列就是这种单一频率的正弦序列。而当 $N=8$ 时，$\cos(\frac{\pi}{8}n)R_N(n)$ 正好是 $\cos(\frac{\pi}{8}n)$ 的半个周期，$\cos(\frac{\pi}{8}n)R_N(n)$ 的周期延拓就不再是单一频率的正弦序列，而是含有丰富的谐波成分，其离散傅里叶级数的系数与 $N=16$ 时的差别很大，因此对信号进行谱分析时，一定要截取整个周期，否则会得到错误的频谱。

例 6-1 对复正弦序列 $x(n)=e^{j\frac{\pi}{8}n}R_N(n)$，利用 MATLAB 程序求当 $N=16$ 和 $N=8$ 时的离散傅里叶变换，并显示其图形。

程序：

```
N=16;N1=8;n=0:N-1;k=0:N1-1;x=exp(j*pi*n/8);
X1=fft(x,N);X2=fft(x,N1);
subplot(2,1,1);
stem(n,abs(X1));
axis([0,20,0,20]);
ylabel('|X1(k)|');
title('16点的 DFT')
subplot(2,1,2);
stem(k,abs(X2));
axis([0,20,0,20]);
ylabel('|X2(k)|');
title('8点的 DFT')
```

运行结果图如图 6.12 所示。

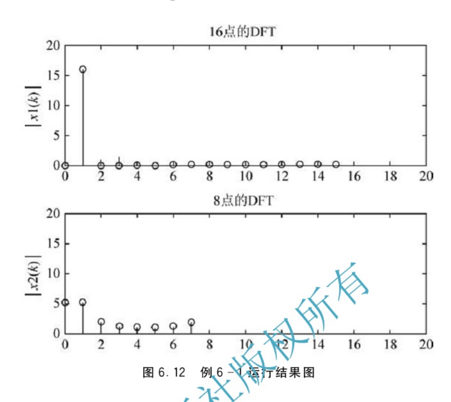


图 6.12　例 6-1 运行结果图

2. 利用函数 fft 验证 N 点 DFT 的物理意义

如前所述，假如 $x(n)$非周期、有限长，则傅里叶变换存在，那么对 $X(e^{j\omega})$在 N 个等间隔频率 $\omega_k=2\pi k/N$，$k=0, 1, \cdots, N-1$ 抽样，则可得 $X(k)$，即

$$X(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=2\pi k/N}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j2\pi kn/N}\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

序列 $x(n)$的 N 点 DFT 的物理意义是对 $X(e^{j\omega})$在 $\omega_k\in[0, 2\pi]$上进行 N 点的等间隔抽样。

例 6-2　已知 $x(n)=R_4(n)$，$X(\omega)=\dfrac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$，绘制相应的幅频和相频曲线，并计算 $N=8$ 和 $N=16$ 时的 DFT。

程序：

```
N1=8;N2=16;
n=0:N1-1;k1=0:N1-1;k2=0:N2-1;
w=2*pi*(0:2047)/2048;
Xw=(1-exp(-j*4*w))./(1-exp(-j*w));%对 x(n)的频谱函数采样 2048 个点可以近似地看成是连续的频谱
xn=[(n>=0)&(n<4)];%产生 x(n)
X1k=fft(xn,N1);
X2k=fft(xn,N2);
subplot(3,2,1);plot(w/pi,abs(Xw));xlabel('w/π');
title('x(n)的幅频曲线')
subplot(3,2,2);plot(w/pi,angle(Xw));axis([0,2,- pi,pi]);
line([0,2],[0,0]);xlabel('w/π');
title('x(n)的相频曲线')
```

```
subplot(3,2,3);stem(k1,abs(X1k),'.');
xlabel('k(w=2πk/N1)');ylabel('|X1(k)|');hold on
plot(N1/2*w/pi,abs(Xw));%图形上叠加连续频谱的幅度曲线
subplot(3,2,4);stem(k1,angle(X1k),'.');
axis([0,N1,-pi,pi]);line([0,N1],[0,0]);
xlabel('k(w=2πk/N1)');ylabel('Arg[X1(k)]');hold on
plot(N1/2*w/pi,angle(Xw));%图形上叠加连续频谱的相位曲线
subplot(3,2,5);stem(k2,abs(X2k),'.');
xlabel('k(w=2πk/N2)');ylabel('|X2(k)|');hold on
plot(N2/2*w/pi,abs(Xw));% 图形上叠加连续频谱的幅度曲线
subplot(3,2,6);stem(k2,angle(X2k),'.');
axis([0,N2,- pi,pi]);line([0,N2],[0,0]);
xlabel('k(w=2πk/N2)');ylabel('Ang[X2(k)]');hold on
plot(N2/2*w/pi,angle(Xw));%图形上叠加连续频谱的相位曲线
```

运行结果图如图 6.13 所示。

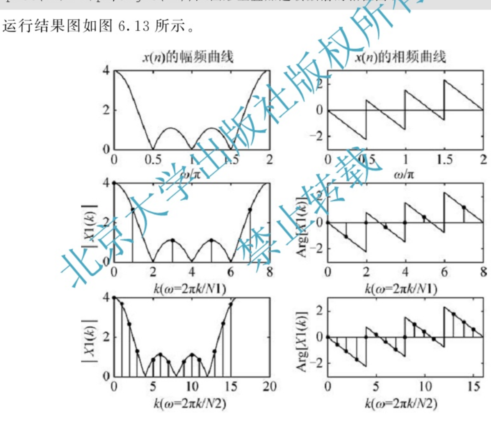


图 6.13 例 6-3 运行结果图

3. 利用 FFT 计算序列的线性卷积

5.4 节中介绍过快速卷积算法，设 $x(n)$和 $h(n)$是长度分别为 M 和 N 的有限长序列，当 $L \geqslant M+N-1$ 时，可以用快速卷积算法来计算它们的线性卷积 $y_1(n)$，在 MATLAB 中可以直接调用函数 fft 来计算。计算线性卷积也可以直接调用函数 conv 来计算，因为 MATLAB 中的计时比较粗糙，所以只有 M 和 N 较大的时候，才能比较两种方法的执行时间快慢。

例 6-3 分别利用快速卷积法以及 conv 函数计算下面两个序列的线性卷积：

$h(n)=[3, 2, 1, -2, 1, 0, -4, 0, 3]$，$0\leqslant n\leqslant 8$ 和 $x(n)=[1, -2, 3, -4, 3, 2, 1]$，$0\leqslant n\leqslant 6$

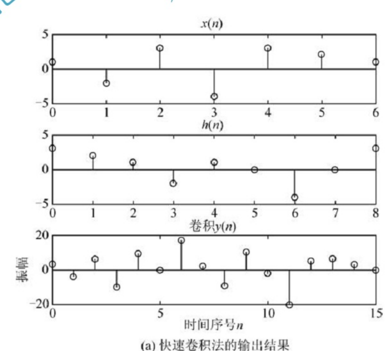
程序 1：快速卷积

```
clf;
h=[3  2  1  -2  1  0  -4  0  3];%冲激
x=[1  -2  3  -4  3  2  1 ];%输入序列
L=pow2(nextpow2(length(x)+length(h)-1));
Xk=fft(x,L);
Hk=fft(h,L);
Yk=Xk.*Hk;
y=ifft(Yk,L);
nh=0:8;nx=0:6;ny=0:L- 1;
subplot(3,1,1);stem(nx,x);title('x(n)');
subplot(3,1,2);stem(nh,h);title('h(n)');
subplot(3,1,3);stem(ny,y);xlabel('时间序号 n');ylabel('振幅');title('卷积 y(n)')
```

程序 2：conv 函数

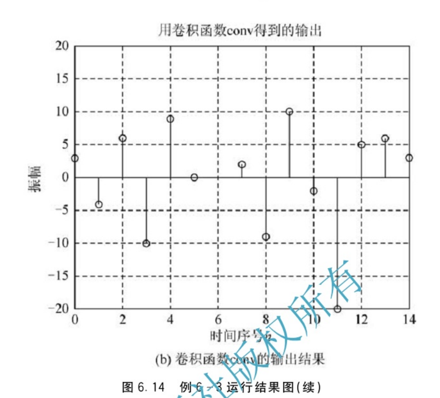
```
clf;
h=[3  2  1  -2  1  0  -4  0  3];%冲激
x=[1  -2  3  -4  3  2  1 ];%输入序列
y=conv(h,x);
n=0:14;
stem(n,y);
xlabel('时间序号 n');ylabel('振幅');
title('用卷积函数 conv 得到的输出'),grid
```


运行结果图如图 6.14 所示。



(a) 快速卷积法的输出结果

图 6.14 例 6-3 运行结果图



(b) 卷积函数conv的输出结果

图 6.14 例 6-3 运行结果图(续)

本 章 小 结

1. 直接计算 DFT 的问题及分解方法

包括了直接计算 DFT 的运算量，降低计算量的分解思想及其特点等。

2. 时域抽取法和频域抽取法基-2FFT 算法

包括了时域抽取法 DIT-FFT 和频域抽取法 DIF-FFT 算法的算法思想和算法特点，两种算法的运算量分析，算法的运算流图。

3. IDFFT 的高效算法——IFFT

FFT 算法的应用，进一步降低运算量的方法。

4. 基于 MATLAB 语言的快速傅里叶变换

MATLAB 在 FFT 运算中的应用及典型例题解析。

知识拓展

快速傅里叶变换是 1965 年由 J. W. 库利和 T. W. 图基提出的。采用这种算法能使计算机计算离散傅里叶变换所需要的乘法次数大为减少，特别是被变换的抽样点数 N 越多，FFT 算法计算量的节省就越显著。自从提出基-2FFT 算法以来，现在已经提出的快速算法有多种，且还在不断地研究和探索中。例如，基-4FFT、分裂基-FFT、离散哈特莱变换、基-8FFT、混合基-FFT 以及进一步减少运算量的途径等。从理论上讲，不同基数的 FFT 算法效率不同，实际中常用的是基-2FFT、基-4FFT、分裂基-FFT 和离散哈特莱变换。

习　　题

6－1　如果一台通用计算机的速度为平均每次复乘需 100μs，每次复加需 20μs，今用来计算 $N=1024$ 点的 DFT$[x(n)]$。问直接运算需多少时间，用 FFT 运算需要多少时间？

6－2　基－2FFT 快速计算的原理是什么？它所需的复乘、复加次数各是多少？

6－3　对于长度为 8 点的实序列 $x(n)$，试问如何利用长度为 4 点的 FFT 计算 $x(n)$的 8 点 DFT？写出其表达式，并画出简略流程图。

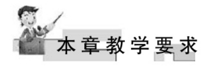
6－4　分别画出 16 点基 2DIT－FFT 和 DIF－FFT 运算流图，并计算其复数乘次数。

6－5　按照下面的 IDFT 算法编写 MATLAB 语言程序，其中的 FFT 部分可直接调用 fft 函数。

$$x(n)=\mathrm{IDFT}[X(k)]=\frac{1}{N}\{\mathrm{DFT}[X^{*}(k)]\}^{*}$$

第7章

滤波器的设计与应用



本章教学要求

- 理解滤波的概念；掌握数字滤波器设计的预备知识和数字滤波器的设计指标。
- 理解模拟低通滤波器的设计方法。
- 掌握用脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字低通滤波器。
- 了解高通、带通 IIR 数字滤波器设计。
- 理解线性相位 FIR 数字滤波器及其特点，掌握用窗函数设计 FIR 数字滤波器的方法。
- 掌握数字滤波器的系统函数与其网络结构流图之间的相互转换方法；掌握 IIR 和 FIR 系统的基本网络结构。
- 理解 IIR 和 FIR 数字滤波器设计有关的 MATLAB 函数应用及典型例题的解析。



推荐阅读资料

[1] 程佩青．数字信号处理教程[M]. 3 版．北京：清华大学出版社，2007.

[2] [美]Oppenheim A V，Schafer R W．数字信号处理[M]．董士嘉，译．北京：科学出版社，1981.

[3] 李芬华，常铁原，潘立冬．数字信号处理[M]．北京：中国计量出版社，2007.

[4] [美]Richard G. Lyons．数字信号处理[M]. 3 版．朱光明，等译．北京：电子工业出版社，2012.

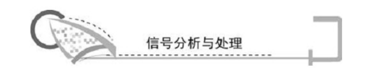
[5] 刘兴钊．数字信号处理教程[M]．北京：电子工业出版社，2010.



引例：滤波器

滤波器(Filter)，是一种用来消除干扰杂讯的器件。对特定频率的频点或该频点以外的频率进行有效滤除的电路，就是滤波器，其功能就是得到一个特定频率或消除一个特定频率。数字滤波器一词出现在60 年代中期。由于电子计算机技术和大规模集成电路的发展，数字滤波器已可用计算机软件实现，也可用大规模集成数字硬件实时实现。

数字滤波器是一个离散时间系统，其按预定的算法，将输入离散时间信号(对应数字频率)转换为所要求的输出离散时间信号的特定功能装置。应用数字滤波器处理模拟信号(对应模拟频率)时，首先必须对输入模拟信号进行限带、抽样和模数转换。为得到模拟信号，数字滤波器处理的输出数字信号必须经数模转换、平滑。数字滤波器具有高精度、高可靠性、可程控改变特性或复用、便于集成等优点。数字滤波器在语言信号处理、图像信号处理、医学生物信号处理以及其他应用领域都得到了广泛应用。



7.1 概　　述

滤波是处理确定性信号的一个重要手段，其作用是滤除信号中的某些频率成分。许多信息处理过程，如信号的过滤、检测、预测等都要用到滤波器。根据系统处理信号的种类不同，可以分为模拟滤波器和数字滤波器两大类，本章将会分别介绍。

7.1.1 理想滤波器及其分类

滤波器的特性很容易通过它的幅频特性来描述，在理想滤波器的幅频特性曲线上，用来无失真地通过信号某些频率分量的滤波器，应该在这些频率上有等于1的频率响应值，并在其他频率上有取零值的频率响应，以便完全阻止那些频率分量。其中频率响应取值为1的频率范围称为通带，频率响应等于零的频率范围则称为阻带。以数字滤波器为例，理想的数字滤波器一般有以下4种类型的频率响应。

图7.1(a)所示的低通滤波器，其通带和阻带分别为$0\leqslant\omega\leqslant\omega_c$和$\omega_c\leqslant\omega\leqslant\pi$。图7.1(b)所示的高通滤波器，阻带为$0\leqslant\omega\leqslant\omega_c$，其通带为$\omega_c\leqslant\omega\leqslant\pi$。图7.1(c)所示的带通滤波器，其通带为$\omega_{c1}\leqslant\omega\leqslant\omega_{c2}$，阻带为$0\leqslant\omega<\omega_{c1}$和$\omega_{c2}<\omega<\pi$。最后图7.1(d)所示的带阻滤波器的通带区域为$0\leqslant\omega\leqslant\omega_{c1}$，而其阻带区域为$\omega_{c1}<\omega<\omega_{c2}$。频率$\omega_c$、$\omega_{c1}$和$\omega_{c2}$分别称为各

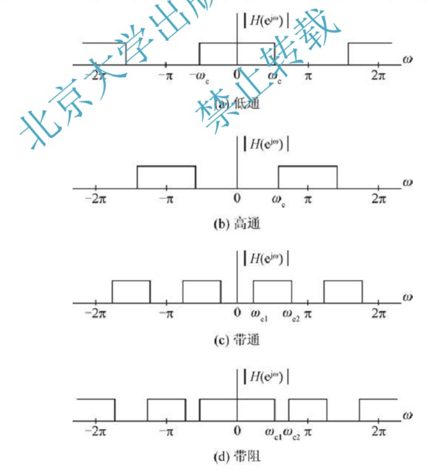


图7.1　理想滤波器的频率响应



自滤波器的截止频率。从上图可以看出，理想滤波器的幅度响应在通带等于1，阻带等于0。模拟滤波器与数字滤波器的类型相同，但它的幅频特性是以模拟角频率 Ω 为自变量，而数字滤波器是以数字角频率 ω 为自变量，两者的区别将在后面的小节讨论。

7.1.2　滤波器的技术要求

由于理想滤波器对应的冲激响应都是非因果的，因此这些理想滤波器在物理上是不可实现的。因果关系意味着滤波器的频率响应特性 $H(e^{j\omega})$ 除了在频率范围的有限点集之外，不能等于零。另外，$H(e^{j\omega})$ 从通带到阻带不能有无限急剧的截止，也就是说 $H(e^{j\omega})$ 不能从1突然下降为零。

虽然，理想滤波器所具有的频率响应特性可能是所希望的，但不可实现。但是，在大多数实际应用中，这些特性不是绝对必要的。假如放松这些条件，那么按照人们所期望的那样密切逼近理想滤波器是可能的。特别是，没有必要坚持幅度滤波器的整个通带范围是常数，在通带范围内，如图7.2所示，一个小量的波纹通常是可容许的。类似的，滤波器响应 $|H(e^{j\omega})|$ 或 $|H(j\Omega)|$ 在阻带范围是零也是不必要的，在阻带范围内一个小的非零值或小量的波纹通常是可容许的。

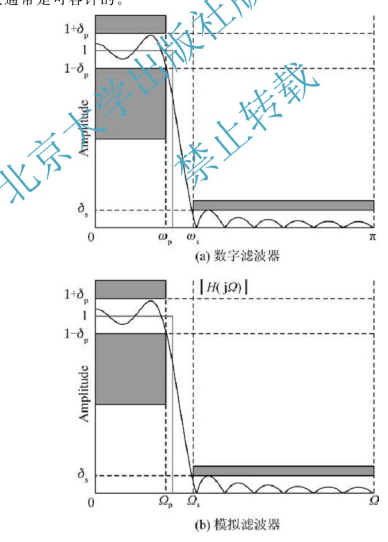


图7.2　物理可实现滤波器的幅度特性

图 7.2 中给出了滤波器的 4 个指标：通带波纹或通带容差 δ_p、阻带波纹或阻带容差 δ_s、通带截止频率 ω_p 或 Ω_p、阻带截止频率 ω_s 或 Ω_s。频率响应从通带过渡到阻带定义了滤波器的过渡带或过渡区域。通常截止频率 ω_p(或 Ω_p)定义了通带边缘，同时频率 ω_s(或 Ω_s)表示阻带的起点，于是过渡带的宽度为 $\omega_s-\omega_p$(或 $\Omega_p-\Omega_s$)，通带的宽度通常称为滤波器的带宽。例如，假如滤波器是一通带截止频率为 ω_p 的低通滤波器，那么它的带宽就是 ω_p。假如在滤波通带内存在波纹，那么用 δ_p 表示它的值，幅度 $|H(e^{j\omega})|$ 或 $|H(j\Omega)|$ 在范围 $1\mp\delta_p$ 之间变化，在滤波器阻带内的波纹表示为 δ_s。

在具体技术指标中，通常使用单位为 dB 的衰减函数 $\hbar(\omega)=-20\lg|H(\omega)|$，定义峰值通带波纹 α_p 和最小阻带衰减 α_s，它们的单位均为 dB，即数字滤波器的衰减指标为

$$\alpha_p=-20\lg(1-\delta_p)\text{dB} \tag{7-1}$$

$$\alpha_s=-20\lg\delta_s\text{dB} \tag{7-2}$$

例 7-1 已知某低通滤波器的通带峰值波纹为 0.01 dB，最小阻带衰减为 70 dB。试确定 δ_p和 δ_s。

解 将 $\alpha_p=0.01$ 代入等式(7-1)，可得

$$\delta_p=1-10^{-\alpha_p/20}=0.00115$$

同样，将 $\alpha_s=70$ 代入等式(7-2)可得

$$\delta_s=10^{-\alpha_p/20}=0.0003162$$

在设计滤波器之前，首先要考虑一个问题，即分析使用滤波器的整个系统的需求，确定合理的滤波器响应指标。一般来说，在任何滤波器的设计问题中，可以按照以下几条规定。

(1) 最大可允许的通带波纹或最大通带衰减 α_p。

(2) 最大可允许的阻带波纹或最小阻带衰减 α_s。

(3) 通带边界频率或通带截止频率 ω_p 或 Ω_p。

(4) 阻带边界频率或阻带截止频率 ω_s 或 Ω_s。

基于上面这些技术指标，可以去逼近相应的频率响应指标。

7.2 模拟滤波器的设计

模拟滤波器的理论和设计方法已发展的相当成熟，且有若干典型的模拟滤波器供人们选择，如巴特沃斯滤波器、切比雪夫滤波器、椭圆滤波器、贝塞尔滤波器等。这些滤波器都有严格的设计公式、现成的曲线和图表供设计人员使用。

模拟滤波器设计的重要步骤是确定一个可实现的系统函数 $H_a(s)$来逼近指定的频率响应，其中频率响应包含幅度和相位(延时)响应。模拟滤波器的设计是一个成熟的被充分研究过的领域，已经提出来的设计模拟滤波器的逼近技术有很多，在大多数实际应用中，关键的问题是用一个可实现的系统函数 $H_a(s)$去逼近给定的滤波器幅度响应指标，其设计指标一般由“幅度平方函数”给出。因此这里介绍一种广泛使用的滤波器设计技术，用幅度平方函数的逼近方法，即用 $|H_a(j\Omega)|^2$ 求模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$。

7.2.1 模拟低通滤波器的设计指标及逼近方法

如前所述，模拟低通滤波器的设计指标有 α_p、α_s、Ω_p 和 Ω_s，其中 Ω_p 和 Ω_s 分别称为模拟通带截止频率和阻带截止频率，α_p 是通带中最大衰减系数，α_s 是阻带的最小衰减系数。如图 7.3 所示，由于

$$|H_a(j\Omega)|=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow -20\lg|H_a(j\Omega_c)|=3\text{dB} \tag{7-3}$$

因此 Ω_c 称为 3dB 截止频率。模拟滤波器幅度响应常用幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 表示，因此滤波器的技术指标给定后，需要设计一个系统函数 $H_a(s)$，希望其幅度平方函数满足给定的指标，即满足所确定的 $|H_a(j\Omega)|^2$。

$$|H_a(j\Omega)|^2=H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \tag{7-4}$$

$$=H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega)=H_a(s)H_a(-s)\big|_{s=j\Omega} \tag{7-5}$$

其中 $H_a(s)$是模拟滤波器的系统函数，它是 s 的有理函数，现在的问题是要由已知的 $|H_a(j\Omega)|^2$ 求得 $H_a(s)$，并且该系统函数 $H_a(s)$必须是稳定的。即 $H_a(s)$的极点全在 s 平面的左半平面，相应 $H_a(-s)$的极点必在 s 平面的右半平面，即在已知设计指标的 $|H_a(j\Omega)|^2$，需要构造一个系统 $H_a(s)$，使其满足 $H_a(s)H_a(-s)=|H_a(j\Omega)|^2$。

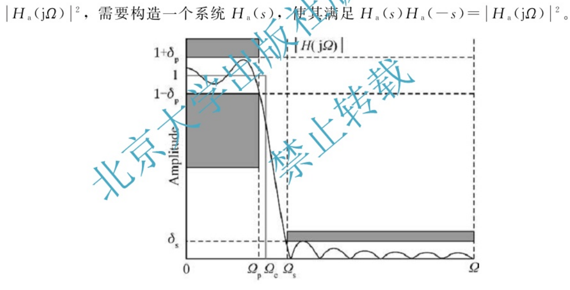


图 7.3 模拟低通滤波器的典型幅度特性

例 7-2 已知一滤波器的幅度平方响应 $|H_a(j\Omega)|^2$ 为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{16\cdot(25-\Omega^2)^2}{(49+\Omega^2)(36+\Omega^2)},$$

求系统函数 $H_a(s)$。

解 $$H_a(s)H_a(-s)=|H_a(j\Omega)|^2\big|_{\Omega^2=-s^2}=\frac{16(25+s^2)^2}{(49-s^2)(36-s^2)}$$

$$=\frac{4(25+s^2)}{(s+7)(s+6)}\cdot\frac{4(25+s^2)}{(s-7)(s-6)}$$

因此选择 $H_a(s)=\dfrac{4(25+s^2)}{(s+7)(s+6)}$

7.2.2 巴特沃斯低通逼近(Butterworth Approximation)

巴特沃斯低通滤波器的特点是幅度频率响应在通带内具有最平坦的特性，并且随着频率的升高，幅度特性是单调下降的。N 阶低通巴特沃斯滤波器 $H_a(s)$的幅度平方响应为

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}} \tag{7-6}$$

巴特沃斯低通滤波器的幅度特性与 Ω 和 N 的关系如图 7.4 所示。幅度下降的速度与阶数 N 有关，N 越大，通带越平坦，过渡带越窄，过渡带与阻带幅度下降的速度越快，总的频率响应与理想低通滤波器的误差越小。

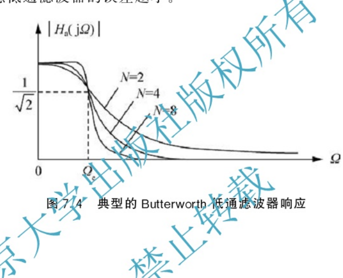


图 7.4　典型的 Butterworth 低通滤波器响应

小知识：

巴特沃斯滤波器是电子滤波器的一种。巴特沃斯滤波器的特点是通频带的频率响应曲线最平滑。这种滤波器最先由英国工程师斯替芬·巴特沃斯(Stephen Butterworth)在 1930 年发表在英国《无线电工程》期刊的一篇论文中提出的。

按照前面给出方法，以 s 替换 jΩ，将 $|H_a(j\Omega)|^2$ 写成 s 的函数，得到

$$H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+(\frac{s}{j\Omega_c})^{2N}} \tag{7-7}$$

其中有 $2N$ 个极点，令$(\frac{s}{j\Omega_c})^{2N}=-1$，得到极点 s_k 为

$$s_k=(-1)^{\frac{1}{2N}}(j\Omega_c)=\Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N})},\ k=0,\ 2,\ \cdots,\ 2N-1 \tag{7-8}$$

其中

$$|s_k|=\Omega_c \tag{7-9}$$

为了形成稳定的滤波器，$2N$ 个极点中只取 s 平面左半平面的 N 个极点构成 $H_a(s)$，而右半平面的 N 个极点构成 $H_a(-s)$，则 $H_a(s)$的表示式为

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1}(s-s_k)} \tag{7-10}$$

令 $N=3$，则有 6 个极点，

$$s_0=\Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi},\quad s_1=-\Omega_c,\quad s_2=\Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}$$

$$s_3=\Omega_c e^{-j\frac{1}{3}\pi},\quad s_4=\Omega_c,\quad s_5=\Omega_c e^{j\frac{1}{3}\pi}$$

那么

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s-\Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s-\Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})} \tag{7-11}$$

由于不同的技术指标对应的边界频率和滤波器幅频特性不同，为使设计公式统一化，将频率归一化。巴特沃斯滤波器采用对 3dB 截止频率 Ω_c 归一化，已归一化的模拟滤波器的极点分布和相应的系统函数、分母多项式的系数都有现成的图表可查，这样更加方便了模拟滤波器的设计。



小知识：

归一化是一种无量纲处理手段，它使物理系统数值的绝对值变成某种相对值关系，简化计算，缩小量值的有效办法。例如，滤波器中各个频率值以截止频率作归一化后，频率都是截止频率的相对值，没有了量纲。阻抗以电源内阻作归一化后，各个阻抗都成了一种相对阻抗值，“欧姆”这个量纲也没有了。等各种运算都结束后，反归一化一切都复原了。信号处理工具箱中经常使用的是 Nyquist 频率，它被定义为抽样频率的一半，在滤波器的阶数选择和设计中的截止频率均使用 Nyquist 频率进行归一化处理。例如，对于一个抽样频率为 1000Hz 的系统，400Hz 的归一化频率就为 400/500＝0.8。归一化频率范围在[0，1]之间。如果将归一化频率转换为角频率，则将归一化频率乘以 2π；如果将归一化频率转换为 Hz，则将归一化频率乘以采样频率的一半。

模拟低通滤波器的幅度特性用归一化的形式表示为

$$H_a(s)=\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{N-1}\left(\frac{s}{\Omega_c}-\frac{s_k}{\Omega_c}\right)} \tag{7-12}$$

其中以 $j\Omega$ 替换 s，$s/\Omega_c=j\Omega/\Omega_c$。令 $\lambda=\Omega/\Omega_c$ 且 $p=j\lambda$，λ 称为归一化频率，p 称为归一化复变量。因此归一化 Butterworth 系统函数为

$$H_a(p)=\frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{N-1}(p-p_k)}=\frac{1}{B(p)} \tag{7-13}$$

式中：p_k 为归一化极点。

$$p_k=e^{j\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{2k+1}{2N}\right)},\quad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{7-14}$$

显然

$$s_k=p_k\Omega_c \tag{7-15}$$

这样，只要根据技术指标求得阶数 N 和 3dB 截止频率 Ω_c，就可通过查表得到归一化系统函数 $H_a(p)$，再通过去归一化，即将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$，就可以得到所需系统的系统函数 $H_a(s)$。表 7-1 和表 7-2 分别为归一化巴特沃斯低通滤波器分母多项式的系数和分母多项式的根。

表 7－1　归一化巴特沃斯低通滤波器分母多项式

$B(p)=p^N+a_{N-1}p_{N-1}+\cdots+a_2p^2+a_1p+1(a_0=a_N=1)$ 系数

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	1								
2	1.4142136								
3	2.0000000	2.0000000							
4	2.6131259	3.4142136	2.6131259						
5	3.2360680	5.2360680	5.2360680	3.2360680					
6	3.8637033	7.4641016	9.1416202	7.4641016	3.8637033				
7	4.4939592	10.0978347	14.5917939	14.5917939	10.0978347	4.4939592			
8	5.1258309	13.1370712	21.8461510	25.6883559	21.8461510	13.1370712	5.1258309		
9	5.7587705	16.5817187	31.1634375	41.9863857	41.9863857	31.1634375	16.5817187	5.7587705	
10	6.3924532	20.4317291	42.8020611	64.8823963	74.2334292	64.8823963	42.8020611	20.4317291	6.3924532

表 7－2　归一化巴特沃斯低通滤波器分母多项式 $B(p)$ 的根

阶数 N \ 极点位置	$p_{0,N-1}$	$p_{1,N-2}$	$p_{2,N-3}$	$p_{3,N-4}$	$p_{4,N-5}$
1	-1.0000				
2	$-0.7071\pm j0.7071$				
3	$-0.5000\pm j0.8660$	-1.0000			
4	$-0.3827\pm j0.9239$	$-0.9239\pm j0.3827$			
5	$-0.3090\pm j0.9511$	$-0.8090\pm j0.5878$	-1.0000		
6	$-0.2588\pm j0.9659$	$-0.7071\pm j0.7071$	$-0.9659\pm j0.2588$		
7	$-0.2225\pm j0.9749$	$-0.6235\pm j0.7818$	$-0.9091\pm j0.4339$	-1.000	
8	$-0.1951\pm j0.9808$	$-0.5556\pm j0.8315$	$-0.8315\pm j0.5556$	$-0.9808\pm j0.1951$	
9	$-0.1736\pm j0.9848$	$-0.5000\pm j0.8660$	$-0.7660\pm j0.6428$	$-0.9397\pm j0.3420$	-1.0000

既然有图表可以查询，所以巴特沃斯滤波器的设计实质上就是根据设计指标求阶数 N 和 3dB 截止频率 Ω_c 的过程。下面介绍阶数 N 的确定方法。

阶数 N 的大小会影响幅频特性的平坦度、过渡带宽度以及阻带的幅度下降速度，它由技术指标 α_p、α_s、Ω_p 和 Ω_s 确定。当 $\Omega=\Omega_p$ 时

$$|H_a(j\Omega_p)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

代入式(7－1)得

$$1+\left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{\alpha_p/10} \tag{7-16}$$

同理可得

$$1+\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{\alpha_s/10} \tag{7-17}$$

因此，由式(7－16)和式(7－17)得到

$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^N=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}$$

令

$$\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_p} \tag{7-18}$$

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}} \tag{7-19}$$

则可以由下式得到阶数 N

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}} \tag{7-20}$$

由于滤波器的阶数必须是一个整数，用上式计算出来的 N 值可能有小数部分，应该取整到最接近的下一个整数(即取大于等于 N 的最小整数)。另外，可以利用 N 的值算出 3dB 截止频率 Ω_c，将 N 代入式(7－16)和式(7－17)得到

$$\Omega_c=\Omega_p\left(10^{0.1\alpha_p}-1\right)^{-\frac{1}{2N}} \tag{7-21}$$

$$\Omega_c=\Omega_s\left(10^{0.1\alpha_s}-1\right)^{-\frac{1}{2N}} \tag{7-22}$$

如果采用式(7－21)确定 Ω_c，则通带指标刚好满足要求，阻带指标有富余；如果采用式(7－22)确定 Ω_c，则阻带指标刚好满足要求，通带指标有富余。

总结以上，设计一个模拟巴特沃斯低通滤波器可以用下面的步骤。

(1) 根据 α_p、α_s、Ω_p 和 Ω_s 的值，利用式(7－18)、式(7－19)和式(7－20)确定巴特沃斯滤波器的最低阶数。

(2) 查表确定归一化系统函数 $H_a(p)$。

(3) 将 $H_a(p)$去归一化。将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$，得到实际的滤波器传输函数 $H_a(s)$。

例 7－3　设计具有以下设计指标的模拟巴特沃斯低通滤波器：通带截止频率 5 kHz，通带截止频率 12 kHz，通带波纹为 2dB，最小阻带衰减为 30dB。

解　(1) 确定最低阶数 N。

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}=-0.242$$

$$\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_p}=\frac{2\pi f_s}{2\pi f_p}=2.4$$

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}}=\frac{-\lg 0.0242}{\lg 2.4}=4.25 \quad 取\ N=5$$

(2) 确定归一化巴特沃斯系统函数 $H_a(p)$。

$$H_a(p)=\frac{1}{p^5+a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}$$

式中：$b_0=1.0000$，$b_1=3.2361$，$b_2=6.2361$，$b_3=6.2361$，$b_4=3.2361$。

(3) 去归一化，确定 $H_a(s)$。

先求 Ω_c：$\Omega_c=\Omega_p\left(10^{0.1\alpha_p}-1\right)^{-\frac{1}{2N}}=2\pi\times 5.2755k\,\text{rad/s}$

此时可根据式(7－21)算出对应的阻带指标

$$\Omega_s'=\Omega_c\left(10^{0.1\alpha_s}-1\right)^{\frac{1}{2N}}=2\pi\times 10.525k\,\text{rad/s}<\Omega_s$$

可见，阻带指标有富余。

将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$，得到

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c^5}{s^5+a_4\Omega_c s^4+a_3\Omega_c s^3+a_2\Omega_c s^2+a_1\Omega_c s+a_0}$$

7.2.3 高通、带通 IIR 数字滤波器设计

在模拟滤波器的设计手册中，各种经典滤波器的设计公式都是针对低通滤波器的，而只要掌握原型变换，就可以通过归一化低通原型的参数，由一些变换公式去设计各种实际的低通、高通、带通或带阻滤波器，这里主要介绍高通和带通滤波器设计。

1. 高通和带通数字滤波器指标

如图 7.5 所示，模拟高通滤波器的设计指标有 α_p、α_s、Ω_p 和 Ω_s，其中 Ω_p 和 Ω_s 分别称为通带截止频率和阻带截止频率，并且 $\Omega_p>\Omega_s$，α_p 是通带中最大衰减系数，α_s 是阻带的最小衰减系数。模拟带通滤波器的设计指标有最大通带衰减 α_p、最小阻带衰减 α_s、期望的通带下截止频率 Ω_l、期望的通带上截止频率 Ω_u、期望的阻带下截止频率 Ω_{s1}、期望的阻带上截止频率 Ω_{s2}。观察高通、带通滤波器的系统函数可以通过频率变换，分别由低通滤波器的系统函数求得，因此可以先将高通、带通滤波器的技术指标转换为低通滤波器的技术指标，先设计相应的低通滤波器，再通过频率变换，将低通的系统函数转换成所需类型的模拟滤波器的系统函数。

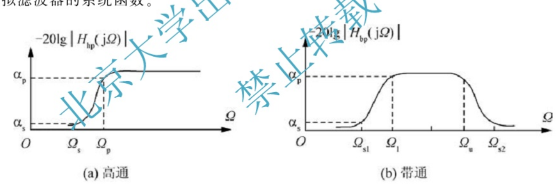


图 7.5 高通与带通滤波器幅度特性

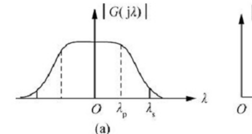
为防止符号混淆，先定义如下符号：设 $G(s)$表示低通滤波器的系统函数，其归一化系统函数为 $G(p)$，$p=\mathrm{j}\lambda$ 为低通的归一化复变量，λ 为低通的归一化频率；$H(s)$所需转换类型(高通或带通)滤波器的系统函数，其归一化系统函数为 $H(q)$，$q=\mathrm{j}\eta$ 是归一化复变量，η 为归一化复变量。

2. 模拟高通和带通滤波器设计

1) 模拟高通滤波器设计

设归一化低通滤波器的幅度特性为 $G(\mathrm{j}\lambda)$，高通滤波器的幅度特性为 $H(\mathrm{j}\eta)$，它们的幅度特性分别如图 7.6(a)、(b)所示。其中 λ_p 和 λ_s 分别是低通的归一化通带截止频率和阻带截止频率，η_p 和 η_s 分别是高通的归一化通带截止频率和阻带截止频率。





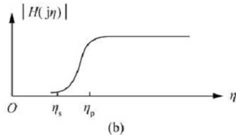


图 7.6　低通和高通滤波器的幅度响应

低通滤波器的归一化频率 λ 与高通滤波器的归一化频率 η 之间的关系为

$$\lambda=\frac{1}{\eta} \tag{7-23}$$

式(7－23)即是低通到高通的频率变换公式，如果已知低通 $G(\mathrm{j}\lambda)$，高通 $H(\mathrm{j}\eta)$则用下式转换：

$$H(\mathrm{j}\eta)=G(\mathrm{j}\lambda)\Big|_{\lambda=\frac{1}{\eta}} \tag{7-24}$$

令 $q=\mathrm{j}\eta$，$p=\mathrm{j}\lambda$，则

$$H(q)=G(p)\big|_{q=1/p} \tag{7-25}$$

由此可得模拟高通滤波器的设计步骤如下。

(1) 确定高通滤波器的技术指标：通带下限频率 Ω'_{p}，阻带上限频率 Ω'_{s}，通带最大衰减 α_{p}，阻带最小衰减 α_{s}。

(2) 确定相应低通滤波器的设计指标：按照式(7－23)，将高通滤波器的边界频率转换成低通滤波器的边界频率，各项设计指标如下。

① 低通滤波器通带截止频率 $\Omega_{\mathrm{p}}=1/\Omega'_{\mathrm{p}}$；

② 低通滤波器阻带截止频率 $\Omega_{\mathrm{s}}=1/\Omega'_{\mathrm{s}}$；

③ 通带最大衰减仍为 α_{p}，阻带最小衰减仍为 α_{s}。

(3) 设计归一化低通滤波器 $G(p)$。

(4) 求模拟高通的 $H(s)$。将 $G(p)$按照式(7－25)转换成归一化高通 $H(q)$，为去归一化，将 $q=s/\Omega_{\mathrm{c}}$ 代入 $H(q)$中，得

$$H(s)=H(q)\big|_{q=s/\Omega_{\mathrm{c}}} \tag{7-26}$$

例 7－4　设计高通滤波器，$f_{\mathrm{p}}=200\mathrm{Hz}$，$f_{\mathrm{s}}=100\mathrm{Hz}$，幅度特性单调下降，$f_{\mathrm{p}}$ 处最大衰减为 3dB，阻带最小衰减 $\alpha_{\mathrm{s}}=15\mathrm{dB}$。

解　(1) 高通滤波器的设计指标为

$$f_{\mathrm{p}}=200\mathrm{Hz},\ \alpha_{\mathrm{p}}=3\mathrm{dB}$$
$$f_{\mathrm{s}}=100\mathrm{Hz},\ \alpha_{\mathrm{s}}=15\mathrm{dB}$$

归一化频率

$$\eta_{\mathrm{p}}=\frac{f_{\mathrm{p}}}{f_{\mathrm{c}}}=1,\ \lambda_{\mathrm{s}}=\frac{f_{\mathrm{s}}}{f_{\mathrm{c}}}=0.5$$

(2) 低通技术要求为

$$\lambda_{\mathrm{p}}=1,\ \lambda_{\mathrm{s}}=\frac{1}{\eta_{\mathrm{s}}}=2$$

$$\alpha_p = 3\text{dB}, \ \alpha_s = 15\text{dB}$$

（3）设计归一化低通 $G(p)$。

采用巴特沃斯滤波器，故

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}} = -0.18$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 2,$$

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = 2.47 \quad 取\ N = 3$$

$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

（4）求模拟高通 $H(s)$：

$$H(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \frac{s^3}{s^3 + 2\Omega_c s^2 + 2\Omega_c^2 s + \Omega_c^3}$$

其中　$\Omega_c = 2\pi f_p$。

2）模拟带通滤波器设计

设归一化低通滤波器的幅度特性为 $G(j\lambda)$，带通滤波器的幅度特性为 $H(j\eta)$，它们的幅度特性分别如图 7.7(a)、(b)所示，其中 λ_p 和 λ_s 分别是低通的归一化通带截止频率和阻带截止频率，η_u 和 η_l 分别是高通的归一化通带上截止频率和下截止频率，η_{s2} 和 η_{s1} 分别是高通的归一化阻带上截止频率和下截止频率。

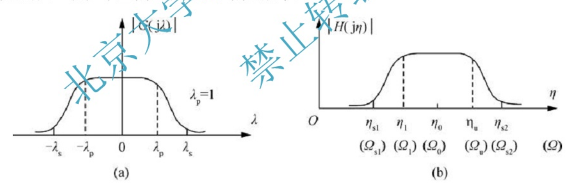


图 7.7　低通和带通滤波器的幅度响应

带通滤波器与高通滤波器不同，它是对带宽归一化。设带通滤波器的带宽为 B，则

$$\begin{cases} \eta_{s1} = \Omega_{s1}/B, \ \eta_{s2} = \Omega_{s2}/B, \\ \eta_l = \Omega_l/B, \ \eta_u = \Omega_u/B, \\ \eta_0^2 = \eta_l \eta_u \end{cases} \tag{7-27}$$

低通滤波器的归一化频率 λ 与带通滤波器的归一化频率 η 之间的关系见表 7-3。

表 7-3　低通滤波器的归一化频率 λ 与带通滤波器的归一化频率 η 的关系

λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	λ_p	λ_s	∞
η	0	η_{s1}	η_l	η_0	η_u	η_{s2}	∞

由表可以推出

$$\lambda=\frac{\eta^2-\eta_0^2}{\eta} \tag{7-28}$$

$$\lambda_p=\frac{{\eta_u}^2-\eta_0^2}{\eta}=\eta_u-\eta_l=1 \tag{7-29}$$

式(7-29)称为低通到带通的频率变换公式。利用该式将带通的边界频率转换成低通的边界频率。下面推导由归一化低通到带通的转换公式。

由于 $$p=j\lambda$$

因此 $$p=j\,\frac{\eta^2-\eta_0^2}{\eta}$$

又因为 $$q=j\eta$$

所以 $$p=\frac{q^2-\eta_0^2}{q} \tag{7-30}$$

为去归一化，将 $q=s/B$ 代入上式，得到

$$p=\frac{s^2+\Omega_l\Omega_u}{s(\Omega_u-\Omega_l)} \tag{7-31}$$

$$H(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_l\Omega_u}{s(\Omega_u-\Omega_l)}} \tag{7-32}$$

式(7-23)就是由归一化低通直接转换成带通的计算公式。

由此可得模拟带通滤波器的设计步骤如下。

(1) 确定模拟带通滤波器的技术指标，即带通上限频率 Ω_u，带通下限频率 Ω_l，下阻带上限频率 Ω_{s1}，上阻带下限频率 Ω_{s2}，通带中心频率 $\Omega_0^2=\Omega_l\Omega_u$，通带宽度 $B=\Omega_u-\Omega_l$ 最大通带衰减 α_p、最小阻带衰减 α_s。

(2) 确定以上边界频率对应的归一化边界频率。

$$\begin{cases}\eta_{s1}=\Omega_{s1}/B,\ \eta_{s2}=\Omega_{s2}/B\\ \eta_l=\Omega_l/B,\ \eta_u=\Omega_u/B\\ \eta_0^2=\eta_l\eta_u\end{cases}$$

(3) 确定归一化低通技术要求：

$$\lambda_p=1,\ \lambda_s=\frac{\eta_{s2}^2-\eta_0^2}{\eta_{s2}},\ -\lambda_s=\frac{\eta_{s1}^2-\eta_0^2}{\eta_{s1}}$$


小提醒：

λ_s 与 $-\lambda_s$ 的绝对值可能不相等，一般取绝对值小的 λ_s，这样保证在较大的 λ_s 处更能满足要求。通带最大衰减仍为 α_p，阻带最小衰减亦为 α_s。

(4) 设计归一化低通 $G(p)$。

(5) 由归一化低通直接转换成带通的计算公式直接将 $G(p)$ 转换成带通 $H(s)$。

例 7-5　设计模拟带通滤波器，通带带宽 $B=2\pi\times200\text{rad/s}$，中心频率 $\Omega_0=2\pi\times1000\text{rad/s}$，通带内最大衰减 $\alpha_p=3\text{dB}$，阻带 $\Omega_{s1}=2\pi\times830\text{rad/s}$，$\Omega_{s2}=2\pi\times1200\text{rad/s}$，阻带最小衰减 $\alpha_s=15\text{dB}$。

解 （1）模拟带通的技术要求：

$$\Omega_0=2\pi\times1000\text{rad/s},\ \alpha_p=3\text{dB}$$

$$\Omega_{s1}=2\pi\times830\text{rad/s},\ \Omega_{s2}=2\pi\times1200\text{rad/s},\ \alpha_s=15\text{dB}$$

$$B=2\pi\times200\text{rad/s}$$

可得 $\eta_0=5$，$\eta_{s1}=4.15$，$\eta_{s2}=6$

（2）模拟归一化低通技术要求：

$$\lambda_p=1,\ \lambda_s=\frac{\eta_{s2}^2-\eta_0^2}{\eta_{s2}}=1.833,\ -\lambda_s=\frac{\eta_{s1}^2-\eta_0^2}{\eta_{s1}}=-1.874$$

取 $\lambda_s=1.833$，$\alpha_p=3\text{dB}$，$\alpha_s=15\text{dB}$。

（3）设计模拟归一化低通滤波器 $G(p)$：

采用巴特沃斯型，有

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}=-0.18,\ \lambda_{sp}=\frac{\lambda_s}{\lambda_p}=1.833,$$

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}}=2.83\quad 取\ N=3$$

$$G(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

（4）求模拟带通 H(s)：

$$\begin{aligned}H(s)&=G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_l\Omega_u}{s(\Omega_u-\Omega_l)}}\\&=s^2B^3[s^6+2B^5s+(3\Omega_0^2+2B^2)s^4+(4\Omega_0^2+B^3)s^3\\&\quad+(3\Omega_0^4+2\Omega_0^2B^2)s^2+2\Omega_0^4Bs+\Omega_0^6]^{-1}\end{aligned}$$

7.3 IIR 数字滤波器设计

数字滤波的概念与模拟滤波相同，只是信号的形式和实现滤波的方法不同。数字滤波器具有模拟滤波器无法比拟的优点。由于数字滤波是通过数值运算实现滤波功能，因此数字滤波器很少依赖硬件，并且具有处理精度高、灵活、方便、抗干扰能力强的特点，能实现模拟滤波器无法实现的特殊滤波功能。数字滤波器从实现的网络结构上可以分为无限长单位冲激响应(IIR)数字滤波器和有限长单位冲激响应(FIR)数字滤波器。本节主要介绍 IIR 数字滤波器设计。在设计 IIR 滤波器时，通常将数字滤波器的设计指标转化成模拟低通原型滤波器的设计指标，从而确定满足这些指标的模拟低通滤波器的传输函数 $H_a(s)$，然后再将它变换成所需要的数字滤波器的传输函数 $H(z)$。由于模拟逼近技术已经很成熟，所以这种方法得到广泛使用。

将模拟原型传输函数 $H_a(s)$变换成所需的数字 IIR 传输函数 $H(z)$的基本思想，是要把 s 域映射到 z 域，从而使数字滤波器能模仿模拟滤波器的特性。因此，这种映射函数(或转换方法)应该具有以下特性。

（1）在 s 平面中的虚轴(jΩ)应映射为 z 平面中的单位圆，因此在两个域中的两个频率

变量之间将存在直接的映射关系。

(2) s 平面的左半平面(LHP)应该映射为 z 平面的单位圆内，因此稳定的模拟系统将被转换成稳定的数字滤波器。

满足上述映射要求的设计方法有很多，常用的有冲激响应不变法、阶跃响应不变法和双线性变换法。前两种的设计思想基本相同，下面主要介绍冲激响应不变法和双线性变换法。

7.3.1 冲激响应不变法

1. 基本原理

冲激响应不变法的目标是设计一个具有模拟滤波器冲激响应 $h_a(t)$ 抽样形成的单位样本响应 $h(n)$ 的 IIR 滤波器，亦即

$$h(n)=h_a(nT),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{7-33}$$

其中 T 为采样间隔。现在的问题就是在满足式(7-33)的条件下，如何找到由 s 平面转换为 z 平面的关系式，即由 s 平面映射到 z 平面的映射关系。

令 $H_a(s)=\mathrm{LT}[h_a(t)]$，$H(z)=\mathrm{ZT}[h(n)]$。设模拟滤波器 $H_a(s)$ 只有单阶极点，且分母多项式的阶次高于分子多项式的阶次，将 $H_a(s)$ 用部分分式表示：

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i} \tag{7-34}$$

式中：s_i 为 $H_a(s)$ 的单阶极点。

将 $H_a(s)$ 进行逆拉氏变换得到 $h_a(t)$：

$$h_a(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i t}u(t) \tag{7-35}$$

式中：$u(t)$ 是单位阶跃函数。

对 $h_a(t)$ 进行等间隔抽样，抽样间隔为 T，得到

$$h(n)=h_a(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i nT}u(nT) \tag{7-36}$$

对上式进行 z 变换，得到数字滤波器的传输函数：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i nT}z^{-n}=\sum_{i=1}^{N}A_i\sum_{n=0}^{\infty}(e^{s_i T}z^{-1})^n \tag{7-37}$$

第二个求和为等比级数之和，为

$$\frac{1-(e^{s_i T}z^{-1})^k}{1-e^{s_i T}z^{-1}}$$

要收敛的话，当 $k=\infty$ 时

$$(e^{s_i T}z^{-1})^k\big|_{k=\infty}=0 \tag{7-38}$$

因此，数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_i T}z^{-1}} \tag{7-39}$$

这就是由 $H_a(s)$ 转换为 $H(z)$ 的关系式，即先因式分解，再由上式推出 $H(z)$。该数字滤



波器具有极点：

$$z_k = e^{s_k T}, \ k=1, 2, \cdots, N \tag{7-40}$$

上式(7-40)即为极点由 s 平面映射到 z 平面的关系式 。

下面进一步分析这种映射关系：已知模拟信号 $h_a(t)$ 和其抽样信号 $\hat{h}_a(t)$ 的傅里叶变换之间的关系为

$$\hat{h}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(t)\delta(t-nT) \tag{7-41}$$

对 $\hat{h}_a(t)$ 进行拉氏变换，得到

$$\begin{aligned}\hat{H}_a(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_a(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\sum_n h_a(t)\delta(t-nT)]e^{-st}dt \\ &= \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t)\delta(t-nT)e^{-st}dt = \sum_n h_a(nT)e^{-snT}\end{aligned} \tag{7-42}$$

式中：$h_a(nT)$ 是 $h_a(t)$ 在抽样点 $t=nT$ 时的幅度值，它与序列 $h(n)$ 的幅度值相等，即 $h(n)=h_a(nT)$，因此得到

$$\hat{H}_a(s) = \sum_n h(n)e^{-snT} = \sum_n h(n)z^{-n}\big|_{z=e^{sT}} = H(z)\big|_{z=e^{sT}} \tag{7-43}$$

已知模拟信号 $h_a(t)$ 的傅里叶变换 $H_a(j\Omega)$ 和其抽样信号 $\hat{h}_a(t)$ 的傅里叶变换之间的关系满足下面的关系。

当频谱为 $H_a(j\Omega)$ 的连续时间信号 $h_a(t)$ 被以间隔 T 等间距抽样时，则抽样后信号的频谱是抽样前信号的频谱的 $1/T$ 倍，即 $1/T[H_a(j\Omega)]$ 以 $\Omega_s=2\pi/T$ 为周期的周期延拓，即

$$\hat{H}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - jk\Omega_s) \tag{7-44}$$

将 $s=j\Omega$ 代入式(7-44)可以得到

$$\hat{H}_a(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - jk\Omega_s) \tag{7-45}$$

由式(7-43)和式(7-45)可得

$$H(z)\big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T}\sum_k H_a(s - jk\Omega_s) \tag{7-46}$$

式(7-46)表明将模拟信号 $h_a(t)$ 的拉氏变换在 s 平面上沿虚轴按照周期 $\Omega_s=2\pi/T$ 延拓后，再按照式(7-40)映射关系，映射到 z 平面上，就得到 $H(z)$。

2. 频谱混叠

通过对模拟滤波器的频率响应进行周期性的延拓获得数字滤波器的系统函数：

$$H(z)\big|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi}{T}k) \tag{7-47}$$

由于 $\Omega_s=2\pi/T$，则

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega}{T} - j\frac{2\pi}{T}k) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\Omega_s k) \tag{7-48}$$



上式说明，$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是$H_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)$以$2\pi/T$为周期的周期延拓函数(对数字频率而言，则是以$2\pi$为周期)。如果原$h_{\mathrm{a}}(t)$的频带不是限于$\pm\pi/T$之间，则会在奇数倍$\pi/T$附近产生频谱混叠，对应数字频率在$\omega=\pm\pi$附近产生频谱混叠，如图7.8所示。

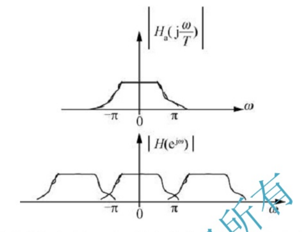


图7.8 模拟滤波器的频率响应$H_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)$与相应数字滤波器的频率响应(有混叠情况)

显然，若模拟滤波器的$H_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)$是带限的，则利用上面的映射方法所得到的相应的数字滤波器可以反映原模拟滤波器的频率特性。

从上面的分析可知，由$H_{\mathrm{a}}(s)$到$H(z)$的映射是s平面的虚轴从$-\frac{\pi}{T}\sim\frac{\pi}{T}$映射到$z$平面上的单位圆从$-\pi\sim\pi$变化一周，而超出这个区段的$s$平面被重复映射到$z$平面的单位圆上，如图7.9所示。

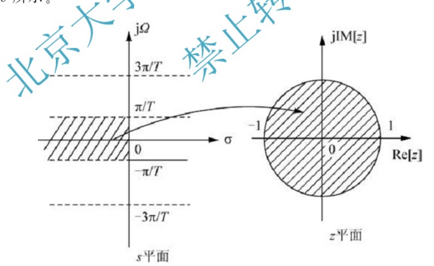


图7.9 s平面到z平面的映射

图7.9中s平面上每一条宽$2\pi/T$的横带部分，都重叠地映射到z平面的整个平面上，其中每一横带的左半部分映射到z平面的单位圆以内，每一横带的右半部分映射到z平面单位圆以外，$\mathrm{j}\Omega$轴映射到单位圆上，$\mathrm{j}\Omega$轴上每一段$2\pi/T$都对应于绕单位圆一周，即从s平面到z平面的标准变换$z=\mathrm{e}^{sT}$是z平面的一值对多值的关系，这种一值对多值的关系导致频谱交叠产生的混淆。由此，可以推断脉冲响应不变法由于其抽样导致的混叠效应，使它不适于设计高通数字滤波器。

例 7-5 利用脉冲响应不变法将下面模拟滤波器转换为相应的数字滤波器

$$H_a(s)=\frac{2}{s^2+4s+3}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+3}$$

解 因为 $s_1=-1$，$s_2=-3$

$$H_a(s)=\sum_i \frac{A_i}{s-s_i} \Rightarrow H(z)=\sum_i \frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

所以 $H(z)=\dfrac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}-\dfrac{1}{1-e^{-3T}z^{-1}}$

当 $T=1$ 时：

$$H(z)=\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-3}z^{-1}}=\frac{0.318z^{-1}}{1-0.4177z^{-1}+0.01831z^{-2}}$$

7.3.2 双线性变换法

在上一节描述的 IIR 滤波器设计方法有一个严重的局限性，那就是它仅仅适合于低通滤波器和另一类有限的带通滤波器。这一节介绍一个称为双线性变换的从 s 平面到 z 平面的映射，该变换克服了前面描述的设计方法的局限性。

如前所述，脉冲响应不变法的主要缺点是频谱交叠产生的混淆，这是从 s 平面到 z 平面的标准变换 $z=e^{sT}$ 的多值对应关系导致的，为了克服这一缺点，设想变换分为两步：第一步：将整个 s 平面压缩到 s_1 平面的一条横带里；第二步：通过标准变换关系将此横带变换到整个 z 平面上去，这就是双线性变换的基本原理，如图 7.10 所示。

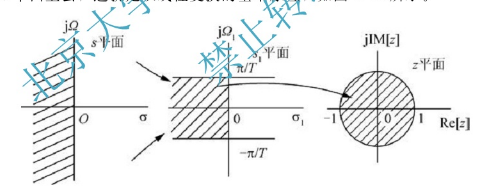


图 7.10 s 平面到 z 平面的映射

双线性变换是一个保形映射，它仅仅将 $j\Omega$ 轴变换到 z 平面的单位圆一次。于是，避免了频率成分的混叠。而且，在 s 平面 LHP 上的所有点被映射到 z 平面的单位圆内，而在 s 平面 RHP 上的所有点被映射到 z 平面的单位圆以外的相应点。

双线性变换是通过应用梯形数值积分方法来从 $H_a(s)$ 的微分方程得到 $H(z)$ 的差分方程的一种变换。参数 T 表示数值积分的步长。

例如，设一个模拟线性滤波器，其传输函数为

$$H(s)=\frac{b}{s+a} \tag{7-49}$$

该系统也可用差分方程描述为



$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ay(t)=bx(t) \tag{7-50}$$

则

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}y'(\tau)\mathrm{d}\tau+y(t_0) \tag{7-51}$$

式中：$y'(t)$表示 $y(t)$的导数。

$$y(nT)=\frac{T}{2}[y'(nT)+y'(nT-T)]+y(nT-T) \tag{7-52}$$

式(7－50)中在 $t=nT$ 时等于

$$y'(nT)=-ay(nT)+bx(nT) \tag{7-53}$$

用式(7－53)代替式(7－52)的导数，由此可以得到该离散时间系统的差分方程。当 $y(n)\equiv y(nT)$且 $x(n)\equiv x(nT)$，可以得到

$$(1+\frac{aT}{2})y(n)-(1-\frac{aT}{2})y(n-1)=\frac{bT}{2}[x(n)+x(n-1)] \tag{7-54}$$

对该式进行 z 变换

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{(bT/2)(1+z^{-1})}{1+aT/2-(1-aT/2)z^{-1}} \tag{7-55}$$

或

$$H(z)=\frac{b}{\frac{2}{T}(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})+a} \tag{7-56}$$

显然，由 s 平面到 z 平面的映射为

$$s=\frac{2}{T}(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}) \tag{7-57}$$

这种变换关系实现了 s 平面到 z 平面的变换，即 s 平面到s_1 平面再到 z 平面的变换。这种变换包含以下两步。

第一步，由 s 平面到s_1 平面的映射：

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan(\frac{1}{2}\Omega_1 T) \tag{7-58}$$

T 仍然是抽样间隔，由图 7.10 分析可见，式(7－58)可以实现当 Ω_1 从$-\pi/T$ 经过 0 变化到 π/T 时，Ω 则由$-\infty$经过 0 变化到∞，实现了 s 平面上整个虚轴完全压缩到 s_1 平面上虚轴的$\pm\pi/T$ 之间的转换，将这一关系解析扩展至整个 s 平面，则得到 s 平面到 s_1 平面的映射关系：

$$\mathrm{j}\Omega=\frac{2}{T}\mathrm{j}\tan(\frac{\Omega_1 T}{2})=\frac{2}{T}\mathrm{j}\frac{\sin(\frac{\Omega_1 T}{2})}{\cos(\frac{\Omega_1 T}{2})}=\frac{2}{T}\mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\Omega_1 T}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\Omega_1 T}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\Omega_1 T}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\Omega_1 T}{2}}}=\frac{2}{T}\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_1 T}}{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega_1 T}}$$

令 $s=\mathrm{j}\Omega$，$s_1=\mathrm{j}\Omega_1$，则

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-\mathrm{e}^{-s_1 T}}{1+\mathrm{e}^{-s_1 T}} \tag{7-59}$$

第二步 由 s_1 平面到 z 平面的映射：

令 $z=e^{s_1 T}$，则

$$s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \text{或} z=\frac{1+s}{1-s} \tag{7-60}$$

上面的映射过程就称为双线性变换，s 平面的点唯一地映射到 z 平面，由于是点对点映射，所以没有混叠。下面分析在这样的映射的关系下，模拟频率 Ω 和数字频率 ω 之间的关系，即双线性变换法的频率变换关系。

令 $z=e^{j\omega}$，$s=j\Omega$，则式(7-57)可以表示为

$$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}=\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}+1}=\frac{2}{T}(j\frac{\sin\omega/2}{\cos\omega/2})=\frac{2}{T}j\tan(\omega/2)$$

即

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \tag{7-61}$$

或者

$$\omega=2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2} \tag{7-62}$$

式(7-62)所表示不同域的频率变量的关系如图 7.11 所示。

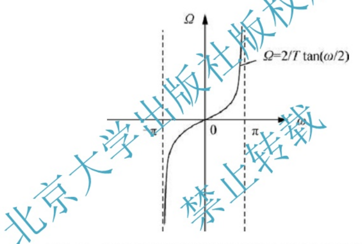


图 7.11　由双线性变换将模拟角频率 Ω 映射为数字角频率 ω

由图 7.11 可见，s 平面的正(负)虚轴被映射到 z 平面单位圆的上(下)半圆。显然该映射是非线性的，s 平面中的负虚轴从 $\Omega=-\infty$ 到 $\Omega=0$ 被映射到 z 平面单位圆的下半部分 $\omega=-\pi$(即 $z=-1$)到 $\omega=0$(即 $z=+1$)，s 平面中的正虚轴从 $\Omega=0$ 到 $\Omega=+\infty$ 被映射到 z 平面单位圆的上半部分从 $\omega=0$(即 $z=+1$)到 $\omega=+\pi$(即 $z=-1$)，这就避免了频率的混叠。

双线性变换法的主要优点是 s 平面与 z 平面一一单值对应，s 平面的虚轴(整个 $j\Omega$)对应于 z 平面单位圆一周，s 平面的 $\Omega=0$ 处对应于 z 平面 $\omega=0$ 处，即对应数字滤波器的频率响应终止于折叠频率处，所以双线性变换不存在混叠效应。

因此为了用双线性变换法设计满足特定幅度响应的数字滤波器，必须首先利用式(7-61)，将临界频带(ω_p 和 ω_s)预先加以畸变，从而找到它们的等效模拟频率(Ω_p 和 Ω_s)，再利用预畸变后的临界模拟原型滤波器 $H_a(s)$，然后对 $H_a(s)$进行双线性变换得到所需的数字滤波器的传输函数 $H(z)$。

例 7-6　用双线性变换法设计一个单极点的低通数字滤波器，要求具有 0.2π 的带宽，

带宽内的最大衰减为 3dB，且：

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c}{s+\Omega_c}$$

其中 Ω_c 为模拟滤波器的 3dB 带宽。

解 由题得该数字滤波器在 $\omega_c=0.2\pi\text{rad}$ 为 3dB 的增益，相应的模拟模拟滤波器为

$$\Omega_c=\frac{2}{T}\tan 0.1\pi=\frac{0.65}{T}\text{rad/s}$$

则相应的模拟滤波器的传输函数为

$$H(s)=\frac{0.65/T}{s+0.65/T}$$

因此数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{0.245(1+z^{-1})}{1-0.509z^{-1}}$$

下面总结利用模拟滤波器设计 IIR 数字低通滤波器的步骤。

(1) 确定数字低通滤波器的技术指标：通带截止频率 ω_p、通带衰减 α_p、阻带截止频率 ω_s、阻带衰减 α_s。

(2) 将数字低通滤波器的技术指标转换成模拟低通滤波器的技术指标。

脉冲响应不变法：$\Omega=\omega/T$

双线性变换法：$\Omega=\dfrac{2}{T}\tan\left(\dfrac{1}{2}\omega\right)$

(3) 按照模拟低通滤波器的技术指标设计模拟低通滤波器。

(4) 将模拟滤波器 $H_a(s)$，从 s 平面转换到 z 平面，得到数字低通滤波器系统函数 $H(z)$。

例 7-7 设计低通数字滤波器，要求在通带内频率低于 $0.2\pi\text{rad}$ 时，容许幅度误差在 1dB 以内；在频率 0.3π 到 πrad 之间的阻带衰减大于 15dB。指定模拟滤波器采用巴特沃斯低通滤波器。试分别用脉冲响应不变法和双线性变换法设计滤波器。

解 (1) 用脉冲响应不变法设计数字低通滤波器。

① 数字低通的技术指标为

$$\omega_p=0.2\pi\text{rad}，\ \alpha_p=1\text{dB}$$
$$\omega_s=0.3\pi\text{rad}，\ \alpha_s=15\text{dB}$$

② 模拟低通的技术指标为

$$T=1\text{s}，\ \Omega_p=0.2\pi\text{rad/s}，\ \alpha_p=1\text{dB};$$
$$\Omega_s=0.3\pi\text{rad/s}，\ \alpha_s=15\text{dB}$$

③ 设计巴特沃斯低通滤波器。先计算阶数 N 及 3dB 截止频率 Ωc。

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}=-0.092，\ \lambda_{sp}=\frac{\lambda_s}{\lambda_p}=1.5，$$

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}}=5.884 \quad 取\ N=6$$

为求 3dB 截止频率 Ω_c，利用 Ω_p 和 α_p 得到 $\Omega_c=0.7032\text{rad/s}$，显然此值满足通带技术

要求，同时给阻带衰减留一定余量，这对防止频率混叠有一定好处。

根据阶数 $N=6$，查表 7－1，得到归一化传输函数为

$$H_a(p)=\frac{1}{1+3.8637p+7.4641p^2+9.1416p^3+7.4641p^4+3.8637p^5+p^6}$$

为去归一化，将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$ 中，得到实际的传输函数 $H_a(s)$：

$$H_a(s)=\frac{\Omega_c{}^6}{s^6+3.8637\Omega_c s^5+7.4641\Omega_c{}^2 s^4+9.1416\Omega_c{}^3 s^4+7.4641\Omega_c{}^4 s^2+3.8637\Omega_c{}^5 s+\Omega_c{}^6}$$

$$=\frac{0.1209}{s^6+2.716s^5+3.691s^4+3.179s^3+1.825s^2+0.121s+0.1209}$$

④ 用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$。首先将 $H_a(s)$ 进行部分分式展开，利用公式得到

$$H(z)=\frac{0.2871-0.4466z^{-1}}{1-0.1297z^{-1}+0.6949z^{-2}}+\frac{-2.1428+1.1454z^{-1}}{1-1.0691z^{-1}+0.3699z^{-2}}$$

$$+\frac{1.8558-0.6304z^{-1}}{1-0.9972z^{-1}+0.2570z^{-2}}$$

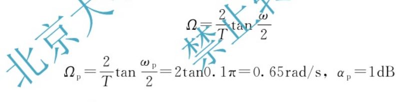
(2) 用双线性变换法设计数字低通滤波器。

① 数字低通技术指标仍为

$$\omega_p=0.2\pi\text{rad}，\alpha_p=1\text{dB}$$

$$\omega_s=0.3\pi\text{rad}，\alpha_s=15\text{dB}$$

② 模拟低通的技术指标为



$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$$

$$\Omega_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}=2\tan0.1\pi=0.65\text{rad/s}，\alpha_p=1\text{dB}$$

$$\Omega_s=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_s}{2}=2\tan0.15\pi=1.019\text{rad/s}，\alpha_s=15\text{dB}$$

③ 设计巴特沃斯低通滤波器。阶数 N 计算如下：

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}=-0.092，\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_p}=1.568，$$

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}}=5.306\quad 取\ N=6$$

利用 Ω_s 和 α_s 求出 Ω_c，得到 $\Omega_c=0.7662\text{rad/s}$。这样阻带技术指标满足要求，通带指标已经超过。

根据 $N=6$，查表 7－1 得到的归一化传输函数 $H_a(p)$ 与脉冲响应不变法得到的相同。为去归一化，将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $H_a(p)$，得实际的 $H_a(s)$：

$$H_a(s)=\frac{0.2024}{(s^2+0.396s+0.5871)(s^2+1.083s+0.5871)(s^2+1.480s+0.5871)}$$

④ 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$：

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.0007378(1+z^{-1})^6}{(1-1.268z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.010z^{-1}+0.358z^{-2})}$$
$$\times\frac{1}{(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$

由于双线性变换法不存在混叠效应，因此可以用来设计数字高通和数字带通滤波器，其步骤与数字低通类似。

(1) 确定所需类型数字滤波器的技术指标。

(2) 将要设计的数字滤波器的设计指标转换为同类型的模拟滤波器的设计指标(用双线性法转换)转换公式为

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$$

(3) 将所需类型模拟滤波器技术指标转换成原型模拟低通滤波器技术指标。

(4) 设计模拟低通滤波器 $G(s)$。

(5) 用步骤(3)的反变换将模拟低通 $G(s)$ 通过频率变换，转换成所需类型的模拟滤波器 $H_a(s)$。

(6) 采用双线性变换法，将所需类型的模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成所需类型的数字滤波器 $H(z)$。

例 7-8 设计一个数字高通滤波器，要求通带截止频率 $\omega_p=0.8\pi\text{rad}$，通带衰减不大于 3dB，阻带截止频率 $\omega_s=0.44\pi\text{rad}$，阻带衰减不小于 15dB。希望采用巴特沃斯型滤波器。

解 (1) 数字高通的技术指标为

$$\omega_p=0.8\pi\text{rad},\ \alpha_p=3\text{dB}$$
$$\omega_s=0.44\pi\text{rad},\ \alpha_s=15\text{dB}$$

(2) 模拟高通的技术指标计算如下：

令 $T=1$，则有

$$\Omega'_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}=6.155\text{rad/s},\ \alpha_p=3\text{dB}$$

$$\Omega'_s=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_s}{2}=1.655\text{rad/s},\ \alpha_s=15\text{dB}$$

(3) 模拟低通滤波器的技术指标计算如下：

$$\Omega_p=\frac{1}{6.155}=0.163\text{rad/s},\ \alpha_p=3\text{dB}$$

$$\Omega_s=\frac{1}{1.655}=0.604\text{rad/s},\ \alpha_s=15\text{dB}$$

将 Ω_p 和 Ω_s 对 3dB 截止频率 Ω_c 归一化，这里 $\Omega_c=\Omega_p$，

$$\lambda_p=1,\ \lambda_s=\frac{\Omega_s}{\Omega_p}=3.71$$

(4) 设计归一化模拟低通滤波器 $G(p)$。模拟低通滤波器的阶数 N 计算如下：

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}=-0.1803,\ \lambda_{sp}=\frac{\lambda_s}{\lambda_p}=3.71,$$

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}=1.31 \quad 取\ N=2$$

查表得到归一化模拟低通传输函数 $G(p)$ 为

$$G(p)=\frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}$$

为去归一化，将 $p=s/\Omega_c$ 代入上式得到

$$G(s)=\frac{\Omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\Omega_c s+\Omega_c^2}$$

(5) 将模拟低通转换成模拟高通。将上式中 $G(s)$ 的变量换成 1/s，得到模拟高通 $H_a(s)$：

$$H_a(s)=G\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{\Omega_c^2 s^2}{\Omega_c^2 s^2+\sqrt{2}\Omega_c s+1}$$

(6) 用双线性变换法将模拟高通 $H_a(s)$ 转换成数字高通 $H(z)$：

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

实际上(5)、(6)两步可合并成一步，即

$$H(z)=G(s)\Big|_{s=\frac{1}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}}=\frac{0.106(1-z^{-1})^2}{1.624+1.947z^{-1}+0.566z^{-2}}$$

$$=\frac{0.0653(1-z^{-1})^2}{1+1.199z^{-1}+0.349z^{-2}}$$

7.4 FIR 数字滤波器设计

7.4.1 线性相位 FIR 数字滤波器的条件和特点

在许多应用中，需要保证设计的数字滤波器在通带内不会使输入信号的相位发生失真，IIR 数字滤波器不能直接设计成线性相位的，而需要用全通网络进行相位校正。有限长单位冲激响应(FIR)数字滤波器则具有严格的线性相位。对于 $h(n)$ 长度为 N 的 FIR 滤波器，其频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n} \tag{7-63}$$

可表示为

$$H(e^{j\omega})=H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)} \tag{7-64}$$

式中：$H_g(\omega)$ 称为幅度特性，$\theta(\omega)$ 称为相位特性。

相位失真就是说当不同频率序列通过滤波器时时间延迟不同，最后这些频率成分在输出端叠加起来后将不再是原来的信号(通带内)。避免任何相位失真的一种方法是使该滤波器的频率响应是实的和非负的(如 $H(e^{j\omega})=1$ 时，则通过的信号不会发生延迟)，即设计一个具有零相位特性的滤波器。然而实际上并不可能设计一个零相位的因果数字滤波器(因为处理信号需要时间，所以必然有延迟)。对于具有非零相位响应的因果传输函数，相位



失真可以通过保证传输函数在感兴趣的频带有一个单位幅度并且有一个线性特性(即不同频率成分通过滤波器后延迟相同，则在输出端叠加后在通带部分还是原来的信号，即是原来信号通带频率部分的延迟)来避免。该类滤波器最常见的频率响应形式为

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\omega\tau} \tag{7-65}$$

上面的滤波器有一个单位幅度响应，并对所有频率有一个数量为τ(τ为常数)的群延迟的线性相位。

$$\begin{cases}|H(e^{j\omega})|=1 & (7-66)\\ \dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}=-\tau & (7-67)\end{cases}$$

式(7-67)可以分为两种情况：

$$\theta(\omega)=-\tau\omega \tag{7-68}$$

和

$$\theta(\omega)=\theta_0-\tau\omega(\theta_0\text{ 为起始相位}) \tag{7-69}$$

称满足式(7-68)为第一类线性相位，满足式(7-69)为第二类线性相位。也就是说，若需要在某个频率分量使幅度和相位不失真地通过输入信号，则系统函数应在感兴趣的频带内具有单位幅度响应和线性相位。

因此，设计FIR滤波器实际上是要在满足线性相位的条件下，实现幅度响应的逼近。而一个FIR滤波器若是符合线性相位，则时域必须满足一定的条件，下面来分析一下是什么条件。

1. 线性相位FIR滤波器的时域约束条件

一个长度为N的线性相位FIR滤波器，其相位响应$\theta(\omega)=-\tau\omega$可以根据式(7-63)和式(7-64)改写成

$$\theta(\omega)=-\tau\omega=\arctan\left[\frac{-\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(\omega n)}\right] \tag{7-70}$$

或

$$\tan(\omega\tau)=\left[\frac{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(\omega n)}\right] \tag{7-71}$$

由三角函数关系得到

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)[\cos(\omega n)\sin(\omega\tau)-\sin(\omega n)\cos(\omega\tau)]=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin[\omega(\tau-n)]=0$$

解方程，可得

$$\begin{cases}\tau=\dfrac{N-1}{2}\\ h(n)=\lambda h(N-1-n),\ 0\leqslant n\leqslant N-1\end{cases} \tag{7-72}$$

其中当$\lambda=1$时，式(7-72)为偶对称，当$\lambda=-1$时，式(7-72)为奇对称。可以证明当$h(n)=h(N-1-n)$，即为偶对称时，FIR滤波器满足第一类线性相位，其幅度特性和相位特性分别为

$$\begin{cases} H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos[(n - \frac{N-1}{2})\omega] \\ \theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega \end{cases} \tag{7-73}$$

当 $h(n)=-h(N-1-n)$，即为奇对称时，FIR 滤波器满足第二类线性相位，其幅度特性和相位特性分别为

$$\begin{cases} H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[(\frac{N-1}{2} - n)\omega] \\ \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega \end{cases} \tag{7-74}$$

也就是说，一个 FIR 滤波器若是线性相位的，则其单位冲激响应必然满足

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{7-75}$$

式中：$h(n)$是关于$(N-1)/2$ 对称(奇对称或偶对称)。

2. 线性相位 FIR 滤波器幅度特性 $H_g(\omega)$的特点

现在来研究一个长度为 N 的因果 FIR 系统函数 $H(z)$：

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k} \tag{7-76}$$

该式是关于变量 z^{-1} 的 $N-1$ 阶多项式，其多项式的根由滤波器的零点组成。如果该 FIR 滤波器具有线性相位，则其冲激响应 $h(n)$是偶对称的：

$$h(n) = h(N-1-n) \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

或是反对称的：

$$h(n) = -h(N-1-n) \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

将偶对称或奇对称条件代入式(7-76)，可以得到

$$\begin{aligned} H(z) &= h(0) + h(1)z^{-1} + \cdots + h(N-2)z^{-(N-2)} + h(N-1)z^{-(N-1)} \\ &= z^{-(N-1)/2}\left\{h(\frac{N-1}{2}) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n)[z^{(N-1-2n)/2} \pm z^{-(N-1-2n)/2}]\right\}, \ N \text{ 为奇数} \\ &= z^{-(N-1)/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{(N-1-2n)/2} \pm z^{-(N-1-2n)/2}], \ N \text{ 为偶数} \end{aligned} \tag{7-77}$$

现在，如果将式(7-76)中的 z^{-1}用 z 代替，并且两边同时乘以 $z^{-(N-1)}$，可得

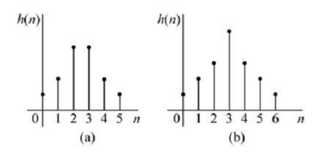
$$z^{-(N-1)} H(z^{-1}) = \pm H(z) \tag{7-78}$$

这个结果表明，多项式 $H(z)$的根等于多项式 $H(z^{-1})$的根。同时，$H(z)$的根必然成对出现。换句话说，如果 z_1 是 $H(z)$的零点，则 $1/z_1$ 也是 $H(z)$的根。此外，如果滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$是实序列，则其复数根必然以共轭形式成对出现，因此如果 z_1 是复数根，则 $z_1{}^*$ 也是它的根。

线性相位 FIR 滤波器的频率响应特性可以利用式(7-79)在单位圆上计算得到，它可以作为 $H_g(\omega)$的表达式。

既然冲激响应的长度可以是奇的，也可以是偶的，可以定义 4 类对称冲激响应的情况

来分别分析各种对称情况响应的幅度特性，如图 7.12 所示。



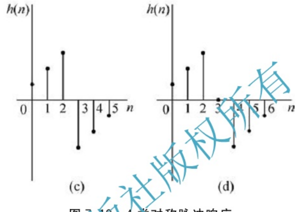


图 7.12 4 类对称脉冲响应

Ⅰ类：$h(n)$偶对称，N 为奇数

$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1/2}a(n)\cos(n\omega) \tag{7-79}$$

式中：$a(0)=h[(N-1)/2]$，$a(n)=2h[(N-1)/2-n]$，$n=1,2,\cdots,(N-1)/2$ 。

由于 $\cos(n\omega)$关于 $\omega=0,\pi,2\pi,\cdots$偶对称，因此 $H_g(\omega)$关于这些频率也是偶对称，即在这些点上 $H_g(\omega)\neq 0$

Ⅱ类：$h(n)$ 偶对称，N 为偶数

$$\begin{cases}H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2}b(n)\cos\left[\omega\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\right]\\ b(n)=2h\left(\dfrac{N}{2}-n\right),\ n=1,2,\cdots,N/2\end{cases} \tag{7-80}$$

由于 $\omega=\pi$ 时，式(7-80)表明 $H_g(\pi)=0$，因此这种情况不能用于设计 $\omega=\pi$ 时，$H_g(\omega)\neq 0$ 时的滤波器，如高通、带阻滤波器。

Ⅲ类：$h(n)$奇对称，N 为奇数

$$\begin{cases}H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}c(n)\sin(n\omega)\\ c(n)=2h\left(\dfrac{N-1}{2}-n\right),\ n=1,2,\cdots,(N-1)/2\end{cases} \tag{7-81}$$

由于 $\sin(n\omega)$关于 $\omega=0,\pi,2\pi,\cdots$奇对称，因此 $H_g(\omega)$关于这些频率也是奇对称，由于 $\omega=0,\pi,2\pi$ 时，$\sin(n\omega)=0$，则 $H_g(\omega)=0$，因此这种情况不能用于设计 $H_g(0)\neq 0$ 和 $H_g(\pi)\neq 0$ 时的滤波器，如低通、高通和带阻滤波器。

Ⅳ类：$h(n)$奇对称，N 为偶数

$$\begin{cases} H_g(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] \\ d(n)=2h(N/2-n),\ n=1,2,\cdots,N/2 \end{cases} \tag{7-82}$$

由于 $\omega=0$ 和 2π 时，式(7-82)表明由于 $H_g(\omega)$在 $\omega=0$ 和 2π 处为零，则这种情况不能设计 $H_g(0)\neq 0$ 及 $H_g(2\pi)\neq 0$，即低通和带阻滤波器。

总结 4 种线性相位 FIR 特性如下。

第一种情况：$h(n)$偶奇，4 种滤波器都可设计。

第二种情况：$h(n)$偶偶，可设计低通、带通滤波器，不能设计高通和带阻滤波器。

第三种情况：$h(n)$奇奇，只能设计带通滤波器，其他类型都不能设计。

第四种情况：$h(n)$奇偶，可设计高通、带通滤波器，不能设计低通和带阻滤波器。

由以上特点可知：在低通线性相位 FIR 滤波器的设计中，不能利用反对称条件。

7.4.2 利用窗函数法设计 FIR 滤波器

设滤波器要求的理想频率响应为 $H_d(e^{j\omega})$，那么 FIR 滤波器的设计问题在于——寻找一个系统函数 $H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$，使其频率响应 $H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 逼近 $H_d(e^{j\omega})$。若要求 FIR 滤波器具有线性相位特性，则 $h(n)$必须满足上面所述的对称条件。逼近的方法有 3 种：窗口设计法(时域逼近)，频率采样法(频域逼近)，最优化设计(等波纹逼近)。

1. 基本原理

窗函数法又称为傅里叶级数法，是最简单的方法，其设计是在时域中进行的，它是从单位脉冲响应序列着手，使 $h(n)$逼近理想的单位脉冲响应序列 $h_d(n)$。设理想滤波器的单位脉冲响应为 $h_d(n)$，$h_d(n)$与 $H_d(e^{j\omega})$是一对傅里叶变换，因此可以由 $H_d(e^{j\omega})$得到 $h_d(n)$。

$$H_d(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)e^{-j\omega n} \tag{7-83}$$

式中：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{7-84}$$

因而一旦 $H_d(e^{j\omega})$给定，就可求的 $h_d(n)$，但这样求得的 $h_d(n)$一般是无限长的，而且是非因果的。如理想低通为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\alpha},\ 0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_c \\ 0,\ \omega_c<|\omega|\leqslant\pi \end{cases},$$

相应的单位取样响应 $h_d(n)$为

$$\begin{aligned} h_d(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)} \end{aligned}$$

这是一个以 α 为中心的偶对称的无限长非因果序列。但 FIR 的 $h(n)$是有限长的，问题是怎样用有限长的序列去近似无限长的 $h_d(n)$。最简单的办法是截取长度为 N 的一段 $h_d(n)$



代替 $h(n)$，并且按照线性相位滤波器的要求，$h(n)$必须是关于$(N-1)/2$对称。因此，延迟 α 就为$h(n)$长度 N 的一半。这种截取可以形象地想象为$h(n)$是通过一个“窗口”所看到的一段 $h_d(n)$，因此 $h(n)$也可以表的为 $h_d(n)$和一个“窗函数”的乘积，即

$$h(n)=h_d(n)\omega(n) \tag{7-85}$$

若是对 $h(n)$直接截取，则窗函数可取矩形窗，其定义为

$$w(n)=\begin{cases}1, & n=0, 1, \cdots, N-1\\0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{7-86}$$

因此 FIR 滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases}h_d(n), & n=0, 1, \cdots, N-1\\0, & \text{otherwise}\end{cases} \tag{7-87}$$

在这里窗口函数就是矩形序列 $R_N(n)$，当然通过下面的分析可以看到，为了改善设计滤波器的特性，窗函数有其他的形式，相当于在矩形窗内对 $h_d(n)$进行一定的加权处理。

2. 吉布斯效应(Gibbs Phenomenon)

现在来讨论按以上方法所设计的滤波器，其频率响应具有怎样的特性？由于频率响应是单位脉冲响应的傅里叶变换，可求的矩形截取后滤波器的频率响应为

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}h_d(n)e^{-j\omega n} \tag{7-88}$$

将上式与理想频率响应的式子比较，

$$H_d(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)e^{-j\omega n} \tag{7-89}$$

它用有限项代替了无限项，其响应与理想频率响应不同。直观而言，肯定 N 越大，误差越小，但对于矩形窗截取，还存在所谓吉布斯效应，使的所设计的滤波器的特性很差，往往不能满足实际的需要。为了说明，下面从频域卷积的角度来分析由矩形窗截取后，滤波器的频率响应。

由于由矩形窗截取后，FIR 滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n)=h_d(n)\omega(n)$$

对上式进行傅里叶变换，根据复卷积定理，得到

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\theta})R_N(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \tag{7-90}$$

式中：$H_d(e^{j\omega}))$和 $R_N(e^{j\omega})$分别是 $h_d(n)$和 $R_N(n)$傅里叶变换，即

$$R_N(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}R_N(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\omega n}=e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega}\ \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}=R_N(\omega)e^{-j\alpha\omega}$$

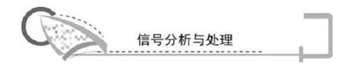
式中：$R_N(\omega)=\dfrac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$，$\alpha=\dfrac{N-1}{2}$。

$R_N(\omega)$称为矩形窗的幅度函数；将 $H_d(e^{j\omega})$写成下式：

$$H_d(e^{j\omega})=H_{dg}(\omega)e^{-j\omega\alpha}$$

理想低通滤波器的幅度特性 $H_{dg}(\omega)$为

$$H_{dg}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leqslant\omega_c\\0, & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases} \tag{7-91}$$



将 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $R_N(e^{j\omega})$ 代入式(7-90)，得到

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{dg}(\theta)e^{-j\theta\alpha}R_N(\omega-\theta)e^{-j(\omega-\theta)\alpha}d\theta$$
$$=e^{-j\omega\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{dg}(\theta)R_N(\omega-\theta)d\theta \tag{7-92}$$

将 $H(e^{j\omega})$ 写成下式：

$$H(e^{j\omega})=H_g(\omega)e^{-j\omega\alpha}$$

则
$$H_g(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)R_N(\omega-\theta)d\theta \tag{7-93}$$

通过上面的分析和图 7.13 可知，$h_d(n)$ 加矩形窗处理后，幅度特性 $H_g(\omega)$ 和原理想低通频率响应 $H_{dg}(\omega)$ 的差别有以下两点。

(1) 在理想特性的不连续点 $\omega=\omega_c$(理想截止频率)附近形成过渡带，过渡带的宽度等于 $\Delta\omega=4\pi/N$(过渡带越窄越接近理想)，即过渡带的宽度由窗函数的主瓣宽度决定，如图 7.14 所示，加大窗函数宽度 N(奇数)时，过渡带会变窄；通带和阻带的波动频率变快，波动幅值随之变小；最大肩峰并不随之变化。

(2) 在截止频率 ω_c 的两边 $\omega=\omega_c\pm2\pi/N$ 处(即过渡带两边)，$H_g(\omega)$ 出现最大肩峰值。肩峰的两侧形成起伏振荡。由于肩峰值的大小决定了滤波器通带内的平稳程度和阻带的衰减，所以对滤波器的性能有很大影响，这就是吉布斯效应。

由于吉布斯效应，因此在实际中很少采用矩形窗。为了消除吉布斯效应，取得较好的频率特性，一般采用其他类型的窗函数 $\omega(n)$，对 $h_d(n)$ 进行加窗处理。

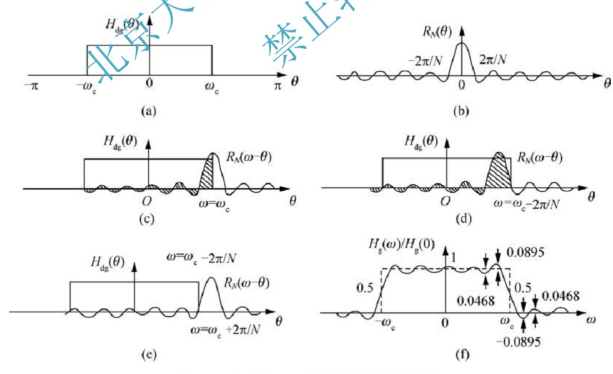


图 7.13　矩形窗对理想低通幅度特性的影响

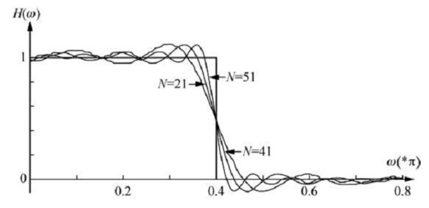


图 7.14　窗函数宽度 N 对过渡带的影响

3. 常用窗函数

1）矩形窗(Rectangle Window)

$$\omega_R(n)=R_N(n)$$

$$W_R(e^{j\omega})=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega} \tag{7-94}$$

下面这些窗函数是通过增加过渡带来减小起伏波纹的。

2）三角形窗(Bartlett window)

$$\omega_{Br}(n)=\begin{cases}\frac{2n}{N-1}, & 0\leqslant n\leqslant\frac{1}{2}(N-1)\\ 2-\frac{2n}{N-1}, & \frac{1}{2}(N-1)<n\leqslant N-1\end{cases} \tag{7-95}$$

$$W_{Br}(e^{j\omega})=\frac{N}{2}\left[\frac{\sin(\frac{N}{4}\omega)}{\sin(\omega/2)}\right]^2 e^{-j(\omega+\frac{N-1}{2}\omega)} \tag{7-96}$$

主瓣宽度为 $8\pi/N$，最大的旁瓣比主瓣低 25dB(5.6%)，如图 7.15 所示。

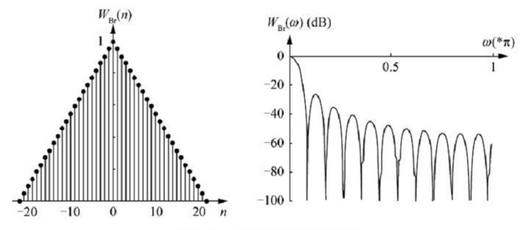


图 7.15　三角形窗及其幅度谱

3）汉宁窗——升余弦窗(Hanning window)

$$\omega_{Hn}(n)=0.5\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n) \tag{7-97}$$

$$W_R(e^{j\omega})=FT[R_N(n)]=W_R(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}}$$

$$W_{Hn}(e^{j\omega})=FT[W_{Hn}(n)]=\{0.5W_R(\omega)+0.25[W_R(\omega-\frac{2\pi}{N-1})+W_R(\omega+\frac{2\pi}{N-1})]\}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}=W_{Hn}(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \tag{7-98}$$

该窗通过3个矩形窗的叠加，使能量主要集中在主瓣内，旁瓣大大减小。主瓣宽度为$8\pi/N$，最大的旁瓣比主瓣低31dB(2.8%)，如图7.16所示。

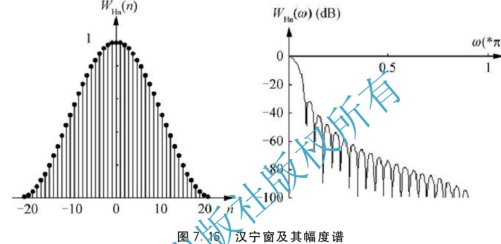


图7.16　汉宁窗及其幅度谱

4）汉明窗——改进的升余弦窗(Hamming window)

$$\omega_{Hm}(n)=[0.54-0.46\cos(\frac{2\pi n}{N-1})]R_N(n) \tag{7-99}$$

$$W_{Hm}(e^{j\omega})=0.54W_R(e^{j\omega})-0.23W_R(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N-1})})-0.23W_R(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{N-1})}) \tag{7-100}$$

与汉宁窗相比，汉明窗两侧出现了微小的跃变，使其最大旁瓣进一步减小。主瓣宽度为$8\pi/N$，最大的旁瓣比主瓣低41dB(0.9%)，如图7.17所示。

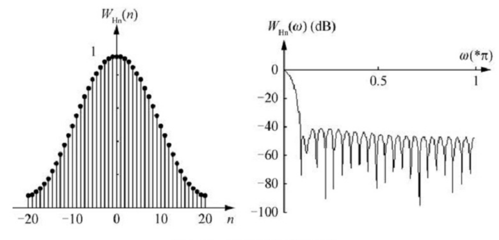


图7.17　汉明窗及其幅度谱

5）布莱克曼窗(Blackman window)

$$\omega_{Bl}(n)=[0.42-0.5\cos(\frac{2\pi n}{N-1})+0.08\cos(\frac{4\pi n}{N-1})]R_N(n) \tag{7-101}$$

$$W_{Bl}(e^{j\omega})=0.42W_R(e^{j\omega})-0.25[W_R(e^{j(\omega-\frac{2\pi}{N-1})})+W_R(e^{j(\omega+\frac{2\pi}{N-1})})]$$
$$+0.04[W_R(e^{j(\omega-\frac{4\pi}{N-1})})+W_R(e^{j(\omega+\frac{4\pi}{N-1})})] \quad (7-102)$$

与汉明窗相比，布莱克曼窗使得最大旁瓣进一步减小，但是主瓣宽度也进一步增加。主瓣宽度为 $12\pi/N$，最大的旁瓣比主瓣低 57dB(0.14%)，如图 7.18 所示。

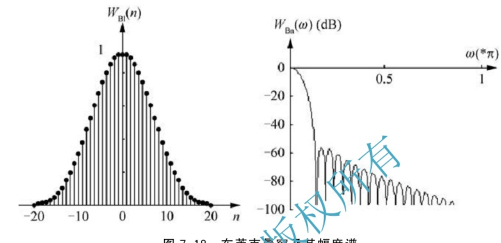


图 7.18　布莱克曼窗及其幅度谱

6）凯塞窗(Kaiser-Basel window)

$$\omega_k(n)=\frac{I_0(\beta)}{I_0(\alpha)},\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \quad (7-103)$$

式中：$\beta=\alpha\sqrt{1-(\frac{2n}{N-1}-1)^2}$。

$I_0(\beta)$是零阶第一类修正贝赛尔函数，计算式为

$$I_0(\beta)=1+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k!}(\frac{\beta}{2})^k)^2$$

六种窗函数参数的比较见表 7－4。

表 7－4　六种窗函数的基本参数

窗函数	旁瓣峰值幅度/dB	过渡带宽	阻带最小衰减/dB
矩形窗	−13	$4\pi/N$	−21
三角形窗	−25	$8\pi/N$	−25
汉宁窗	−31	$8\pi/N$	−44
汉明窗	−41	$8\pi/N$	−53
布莱克曼窗	−57	$12\pi/N$	−74
凯塞窗($\alpha=7.865$)	−57	$10\pi/N$	−80

综上所述，利用窗函数法设计 FIR 滤波器的过程可总结如下。

(1) 根据技术要求，确定待求滤波器的理想频响 $H_d(e^{j\omega})$。

(2) 利用下式求出理想单位取样响应 $h_d(n)$：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

当 $H_d(e^{j\omega})$ 较为复杂时，$h_d(n)$ 不容易由反傅里叶变换求得，这时一般可用离散傅里叶变换代替连续傅里叶变换，求得近似值。实际计算时(用计算机计算)，可以用 $H_d(e^{j\omega})$ 的 M 个采样值的逆 DFT(FFT)来计算。

(3) 按照允许的过渡带宽度 $\Delta\omega$ 及阻带衰减 α_s，选择合适的窗函数 $\omega(n)$，并估计阶数 N。

$$\Delta\omega=A/N\Rightarrow N=A/\Delta\omega$$

(4) 确定延迟值 $\alpha=(N-1)/2$。

(5) 求 $h(n)=h_d(n)w(n)$(其中用延迟值 α 代入窗函数)。

(6) 必要时验算 FIR 滤波器的频率响应 $H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$ 是否满足要求(用计算机)。

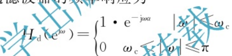
例 7-9 设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器，要求符合以下指标。

截止频率：$\omega_c=0.2\pi\text{rad}$

过渡带：$\Delta\omega<0.4\pi\text{rad}$

阻带衰减：$\alpha_s>40\text{dB}$

解 (1) 理想 FIR 低通滤波器的频率响应为



$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1\cdot e^{-j\omega\alpha} & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

(2) 理想 FIR 低通滤波器的脉冲响应为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

(3) 选择合适的窗函数及长度 N。

由于 $\alpha_s>40\text{dB}$，选择汉宁窗

$$N=\frac{8\pi}{\Delta\omega}=20\approx21$$

(4) 延迟 $\alpha=\dfrac{N-1}{2}=10$

(5) $h(n)=h_d(n)\omega(n)=\dfrac{1}{2}\left[1-\cos\left(\dfrac{2n\pi}{N-1}\right)\right]\dfrac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}R_N(n)$

$$=\frac{[1-\cos(0.1\pi n)]\sin[0.2\pi(n-10)]}{2\pi(n-10)}R_{20}(n)$$

例 7-10 设计一个线性相位 FIR 数字低通滤波器，要求符合以下指标。

采样频率：$\Omega_s=2\pi\times1.5\times10^4(\text{ras/s})$；通带截止频率：$\Omega_p=2\pi\times1.5\times10^3(\text{ras/s})$；阻带截止频率：$\Omega_{st}=2\pi\times3\times10^3(\text{ras/s})$；阻带衰减：$\alpha_s>50\text{dB}$

解 (1) 确定响应的数字频率。



通带截止频率为 $\omega_p=\frac{\Omega_p}{f_s}=2\pi\frac{\Omega_p}{\Omega_s}=0.2\pi\text{rad}$

阻带截止频率为 $\omega_{st}=\frac{\Omega_{st}}{f_s}=2\pi\frac{\Omega_{st}}{\Omega_s}=0.4\pi\text{rad}$

阻带衰减为 $\alpha_s>50\text{dB}$

（2）理想 FIR 低通滤波器的频率响应为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}1\cdot e^{-j\omega\alpha} & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

$$\Omega_c=\frac{1}{2}(\Omega_p+\Omega_{st})=2\pi\times 2.25\times 10^3(\text{rad/s})$$

$$\omega_c=\frac{\Omega_c}{f_s}=2\pi\frac{\Omega_c}{\Omega_s}=0.3\pi\text{rad}$$

（3）理想 FIR 低通滤波器的脉冲响应为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin(\omega_c(n-\alpha))}{\pi(n-\alpha)}$$

或

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi(n-\tau)}\sin[\omega_c(n-\tau)], & n\neq\tau\\ \frac{\omega_c}{\pi}, & n=\tau\end{cases}$$

（4）选择合适的窗函数及长度 N。

因为 $\alpha_s>50\text{dB}$，$\Delta\omega=\omega_s-\omega_p=0.2\pi$

所以选择汉明窗：$N=\frac{8\pi}{\Delta w}=\frac{8\pi}{0.2\pi}=40$，令 N=41

（5）延迟 $\alpha=\frac{N-1}{2}=20$。

（6）汉明窗：

$$\omega(n)=[0.54-0.46\cos(\frac{2\pi n}{N-1})]R_N(n)$$

$$h(n)=h_d(n)\omega(n)=[0.54-0.46\cos(\frac{2n\pi}{N-1})]\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}R_N(n)$$

$$=\frac{[0.54-0.46\cos(0.05\pi n)]\sin[0.3\pi(n-20)]}{\pi(n-20)}R_{40}(n)$$

7.5 数字滤波器的基本结构

网络结构就是系统实现方法的构造形式(系统函数的表达形式)。网络结构表示一定的运算结构，而不同结构的运算复杂程度、运算速度、运算误差是不同的，因此研究实现信号处理的网络结构是很重要的。

一般时域离散系统可以用差分方程、单位脉冲响应以及系统函数等进行描述。几种描述方式可以相互转换。一般来说，可以将一个离散时间系统看作一个以输入序列 $x(n)$ 确定系统的输出序列 $y(n)$ 的计算过程(方法)。给定一个系统，实现该系统的算法有许多种，这与选择的算法结构有关。

对于一个系统函数 $H(z)$，可以有不同的系统结构，例如

$$H_1(z)=\frac{1}{1-0.8z^{-1}+0.15z^{-2}}$$

$$H_2(z)=\frac{-1.5}{1-0.3z^{-1}}+\frac{2.5}{1-0.5z^{-1}}$$

$$H_3(z)=\frac{1}{1-0.3z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

为了用计算机或数字设备对输入信号进行处理，必须将上面表示系统的公式变换成一种算法。

7.5.1 数字滤波器结构的表示方法

1. 基本结构

LTI 离散时间系统的算法可以用延时单元、乘法器、加法器和网络节点这些基本的结构块以方框图或信号流图的形式方便地表示。数字滤波器中常用 3 种基本运算：加法、单位延迟、乘常系数，这 3 种基本单元的方框图和流图表示如图 7.19 所示。

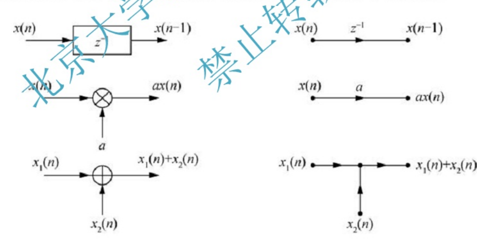


图 7.19　3 种基本运算的方框图及流图表示

例如，系统 $y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+a_1y(n-1)$ 的信号流图可表示为图 7.20 所示。

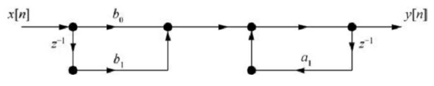


图 7.20　信号流图表示



2. 转置定理(Equivalent Structures，等效结构)

如果两个滤波器具有相同的传输函数，则称它们为等效的。理论上一个传输函数有无限多的等效结构，且每个等效结构的性能都相同，但在实现的过程中，不同结构间的性能可能存在以下非常大的差别。

(1) 所需的存储单元及乘法次数不同，前者影响复杂性，后者影响运算速度。

(2) 有限精度(有限字长)实现情况下，不同运算结构的误差及稳定性不同。

(3) 好的滤波器结构应该易于控制滤波器性能，适合于模块化实现，便于时分复用。

一种产生等效结构的方法就是转置。转置定理可以简单地陈述为，假如倒转所有支路透射率的方向，并且交换图中的输入和输出，那么系统函数保持不变。经转置所得到的结构称为转置结构或转置型。

7.5.2 无限长脉冲响应 IIR 基本网络结构

本课程所涉及的因果 IIR 数字滤波器可以由形如式(7-104)的系统函数或由形如式(7-105)的常系数差分方程描述。

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1-a_1z^{-1}-\cdots-a_Nz^{-N}} \tag{7-104}$$

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_ix(n-i)+\sum_{i=1}^{N}a_iy(n-i) \tag{7-105}$$

从差分方程描述可以看出，第 n 个输出样本与过去的输出样本有关，换句话说就是因果的 IIR 系统必然包含反馈。

1. 直接型结构

乘法器的系数为传输函数的系数的 IIR 滤波器结构称为直接型结构。

1) 直接Ⅰ型

由形如式(7-104)的有理系统函数所描述 IIR 系统可以表示为

$$H(z)=H_1(z)H_2(z)$$

其中 $H_1(z)$ 由 $H(z)$ 的零点组成，$H_2(z)$ 由 $H(z)$ 的极点组成，即

$$H_1(z)=b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M} \tag{7-106}$$

$$H_2(z)=\frac{1}{1-a_1z^{-1}-\cdots-a_Nz^{-N}} \tag{7-107}$$

令 $M=2$ 且 $N=2$，其直接Ⅰ型结构如图 7.21 所示。

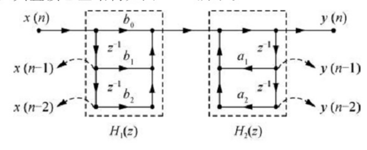
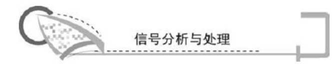


图 7.21 IIR 网络的直接Ⅰ型结构



2） 直接Ⅱ型

直接Ⅰ型结构的两部分可以看成两个独立的网络(即两个子系统)。一个线性时不变系统，若交换其级联子系统的次序，系统函数不变。将此原理应用于直接Ⅰ型结构。即交换两个级联网络的次序，再合并两个具有相同输入的延时支路，则得到另一种结构即直接Ⅱ型，如图 7.22 所示。

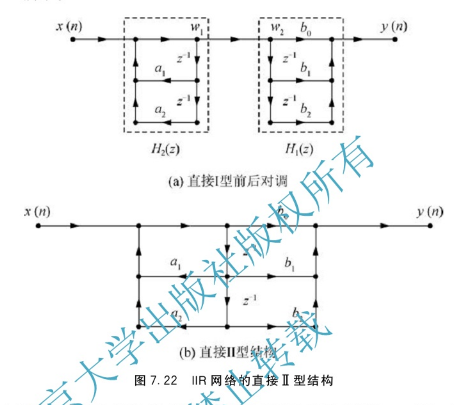


图 7.22　IIR 网络的直接Ⅱ型结构

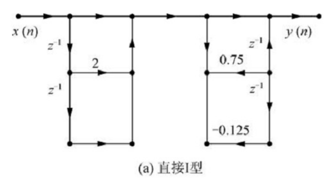
如果一个滤波器所用的延时单元数目与差分方程的阶数相等(max(N，M))，则称为规范结构，否则为非规范结构。直接Ⅱ型结构属于规范结构。

例 7－11　设 IIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0.75z^{-1}+0.125z^{-2}}$$

画出该滤波器的直接型结构。

解　该滤波器的直接型结构如图 7.23 所示。



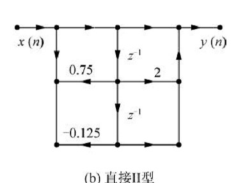


图 7.23　例 7－10 图





小提醒：

直接Ⅰ型和直接Ⅱ型结构存在着系数 a_k、b_k 不能直接决定单个零、极点，因而不能很好地进行滤波器性能控制。

2. 级联型结构

在式(7-104)表示的系统函数 $H(z)$ 中，公子分母均为多项式，且多项式的系数一般为实数，现将分子分母多项式分别进行因式分解，高阶的传输函数就可以分解为多个低阶传输函数之积。例如

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{B_1(z)B_2(z)B_3(z)}{A_1(z)A_2(z)A_3(z)}=H_1(z)H_2(z)H_3(z)$$

通常可以将多项式分解为一阶或二阶多项式之积：

$$H(z)=\prod_{k=1}^{K}H_k(z) \tag{7-108}$$

上式中 $H_k(z)$ 有下面的一般形式：

$$H_k(z)=\frac{\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}} \tag{7-109}$$

每个一阶或二阶子系统 $H_k(z)$ 都可以由直接Ⅰ型，或直接 Ⅱ型实现，如图 7.24 所示。

例如，$H(z)=p_0\dfrac{1+\beta_{11}z^{-1}}{1-\alpha_{11}z^{-1}}\cdot\dfrac{1+\beta_{12}z^{-1}+\beta_{22}z^{-2}}{1-\alpha_{12}z^{-1}-\alpha_{22}z^{-2}}$

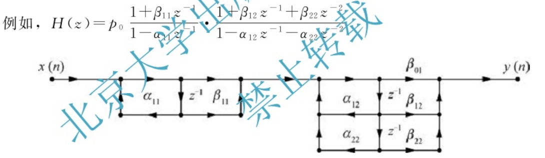


图 7.24 IIR 网络的级联型结构

级联型结构的每个二阶节只关系到滤波器的某一对极点和一对零点，调整 β_{1k}，β_{2k}，…只单独调整滤波器第 k 对零点，而不影响其他零点。同样，调整 α_{1k}，α_{2k}，…只单独调整滤波器第 k 对极点，而不影响其他极点。因此每个二阶节系数单独控制一对零点或一对极点，有利于控制频率响应。

3. 并联型结构

如果将级联形式的 $H(z)$，展开部分分式形式，可得到 IIR 并联型结构：

$$H(z)=C+H_1(z)+H_2(z)+\cdots+H_k(z)=C+\sum_{i=1}^{k}H_i(z) \tag{7-110}$$

式中：$H_i(z)$ 通常为一阶网络和二阶网络，网络系统均为实数。二阶网络的系统函数一般为

$$H_i(z)=\frac{\beta_{0i}+\beta_{1i}z^{-1}}{1-\alpha_{1i}z^{-1}-\alpha_{2i}z^{-2}} \tag{7-111}$$

式中：β_{0i}、β_{1i}、α_{1i}和α_{2i}都是实数。

如果$\alpha_{2i}=0$则构成一阶网络。每个一阶或二阶子系统$H_i(z)$都可以由直接Ⅰ型或直接Ⅱ型实现，如图7.25所示。

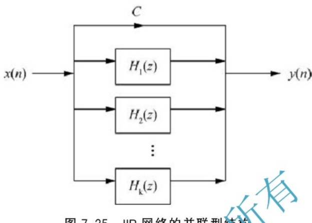


图7.25　IIR网络的并联型结构

并联型结构可以单独调整极点位置，但不能像级联那样直接控制零点(因为只为各阶传输函数的零点并非整个系统函数的零点)。另外并联型结构误差最小，因为并联型各基本节的误差互不影响，所以比级联误差少。

例7-12　画出下面$H(z)$的并联型结构。

$$H(z)=16+\frac{8}{1-0.5z^{-1}}+\frac{-16+20z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

解　每个部分分式用直接Ⅱ型实现，如图7.26所示。

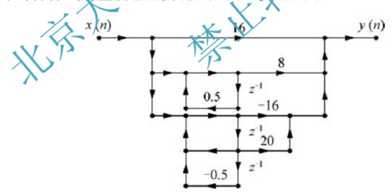


图7.26　例7-12图

7.5.3　有限长脉冲响应FIR系统基本网络结构

因果的N阶FIR滤波器可以表示为

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}b_kx(n-k) \tag{7-112}$$

或

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1}b_kz^{-k} \tag{7-113}$$

FIR网络结构特点是没有反馈支路，即没有环路，其单位脉冲响应是有限长的。

$$h(n)=\begin{cases}b_n, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\tag{7-114}$$

FIR滤波器系统总是稳定的，其基本网络结构包括直接型、级联型、频率采样结构等。

1. 横截型

按照 $H(z)$或者差分方程直接画出结构图如图7.27所示。这种结构称为直接型网络结构或者称为卷积型结构，也称为抽头延迟线或横向滤波器。

$$\begin{aligned}y(n)&=x(n)*h(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m)\\&=h(0)x(n)+h(1)x(n-1)+\cdots+h(N-1)x(n-N+1)\end{aligned}\tag{7-115}$$

图7.27　FIR系统直接型结构流图

直接型结构中乘法器的系数为传输函数的系数，M 阶FIR滤波器由 $M+1$ 个系数决定，通常需要 $M+1$ 次乘法和 M 次两输入的加法来实现，其缺点是零点控制不方便。

2. 级联型

高阶FIR传输函数可以由每部分都是一阶或二阶传输函数级联来实现。将 $H(z)$进行因式分解，并将共轭成对的零点放在一起，形成一个系数为实数的二阶形式，这样级联型网络结构就是由一阶或二阶因子构成的级联结构，其中每一个因式都用直接型实现。

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N/2}(\beta_{0k}+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2})\tag{7-116}$$

当FIR的传输函数是两个二阶传输函数级联时，如图7.28所示。

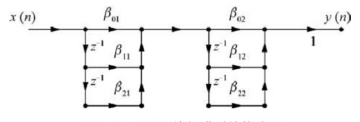


图7.28　FIR系统级联型结构流图

级联型结构所需的系数比直接型多，所需乘法运算也比直接型多。但是级联型结构的每一节控制一对零点，因而多用于需要控制传输零点的场合。



例 7-13 设 FIR 网络系统函数 $H(z)$ 如下式：

$$H(z)=0.96+2.0z^{-1}+2.8z^{-2}+1.5z^{-3}$$

画出 $H(z)$ 的直接型结构和级联型结构。

解 将 $H(z)$ 进行因式分解，得到

$$H(z)=(0.6+0.5z^{-1})(1.6+2z^{-1}+3z^{-2})$$

其直接型结构和级联型结构如下图 7.29 所示。

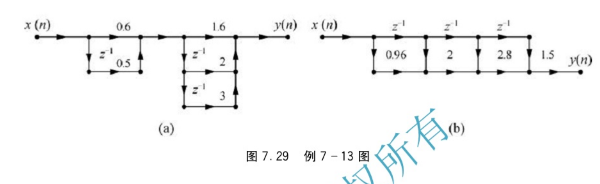


图 7.29 例 7-13 图

3. 线性相位型结构

线性相位 FIR 滤波器的单位抽样响应是对称或反对称的，即

$$h(n)=\pm h(N-1-n) \tag{7-117}$$

下面从上式出发推导线性相位 FIR 滤波器结构。

设 N 取偶数，则

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)z^{-n}+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

令 $M=N-1-n$，得

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)z^{-n}+\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}h(N-1-m)z^{-(N-1-m)}$$

将 m 换成 n，再将式(7-117)代入上式，得

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}h(n)[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}] \tag{7-118}$$

设 N 取奇数，则

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)z^{-n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}+\sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

令 $m=N-1-n$，得

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)z^{-n}+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}}+\sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(m)z^{-(N-1-m)}$$

将 m 换成 n，再将式(7-117)代入上式，得

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1}h(n)[z^{-n}\pm z^{-(N-1-n)}]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} \tag{7-119}$$

式(7－118)和式(7－119)中“＋”号代表偶对称，“－”号代表奇对称。当 $h(n)$ 奇对称时，由于 $h(n)=-h(N-1-n)$，故 $h(\frac{N-1}{2})=0$ 。由式(7－118)和式(7－119)可分别画出 N 为偶数和奇数时，线性相位 FIR 滤波器的直接结构流图，如图 7.30 和图 7.31 所示。

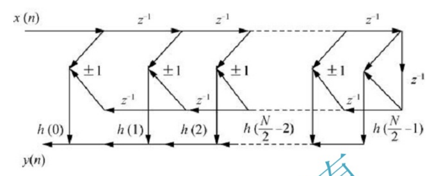


图 7.30　N 为偶数时线性相位 FIR 系统的直接型结构流图

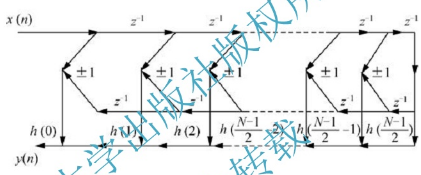


图 7.31　N 为奇数时线性相位 FIR 系统的直接型结构流图

由以上两图中可以看出，线性相位 FIR 滤波器结构比一般直接型结构可节省一半数量的乘法次数。

7.6　基于 MATLAB 语言的滤波器的设计

7.6.1　应用 MATLAB 设计 IIR 数字滤波器

目前，设计 IIR 数字滤波器的通用方法是先设计相应的低通滤波器，然后再通过双线性变换法和频率变换得到所需要的数字滤波器。模拟滤波器从功能上分有低通、高通、带通及带阻 4 种，从类型上分有巴特沃斯滤波器、切比雪夫滤波器、椭圆滤波器以及贝塞尔滤波器等。

下面给出与 IIR 数字滤波器设计有关的 MATLAB 文件。

1. buttord.m

用来确定数字低通或模拟低通滤波器的阶次，其调用格式分别为

```
(1)[N,Wn]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs)
(2)[N,Wn]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s')
```

格式(1)对应数字滤波器，式中 Wp 和 Ws 分别是通带和阻带的截止频率，实际上它们是归一化频率，其值在 0～1 之间，1 对应 π(即对 π 的归一化)。Rp 和 Rs 分别是通带和阻带衰减，单位为 dB。N 是求出的相应低通滤波器的阶次，Wn 是求出的 3dB 频率。

格式(2)对应模拟滤波器，式中各个变量的含义和格式(1)相同，但 Wp 和 Ws 及 Wn 是模拟角频率，单位为 rad/s。

2. buttap. m

用来设计模拟低通原型(归一化)滤波器 $H_a(p)$，其调用的格式为

```
[z,p,k]=buttap(N)
```

N 是欲设计的低通原型(归一化)滤波器的阶次，z、p 和 k 分别是设计出 $H_a(p)$的极点、零点及增益。

3. lp2lp. m

将模拟低通原型(归一化)滤波器 $H_a(p)$转换为实际的低通滤波器 $H_a(s)$(去归一化)。其调用格式为

```
[B,A]=lp2lp(b,a,Wn)
```

b、a 分别是模拟低通原型滤波器 $H_a(p)$的分子、分母多项式的系数向量，其中 B、A 是去归一化后 $H_a(s)$的分子、分母多项式的系数向量，Wn 为截止频率。

4. bilinear. m

实现双线性变换，即由模拟滤波器 $H_a(s)$得到数字滤波器 $H(z)$。其调用格式是

```
[Bz,Az]=bilinear(B,A,Fs)
```

B、A 是去归一化后 $H_a(s)$的分子、分母多项式的系数向量，Bz、Az 是 $H(z)$的分子、分母多项式的系数向量，Fs 是抽样频率。

5. impinvar. m

由脉冲响应不变法将模拟滤波器 $H_a(s)$转换为数字滤波器 $H(z)$。其调用格式是

```
[Bz,Az]=impinvar(B,A,Fs)
```

B、A 是去归一化后 $H_a(s)$的分子、分母多项式的系数向量，Bz、Az 是 $H(z)$的分子、分母多项式的系数向量，Fs 是抽样频率。

6. butter. m

用来直接设计巴特沃斯数字滤波器(双线性变换法)，实际上它把 buttord. m，buttap. m，lp2lp. m 及 bilinear. m 等文件都包含进去，从而使设计过程更简捷，其调用格式为

```
(1)[B,A]=butter(N,Wn)
(2)[B,A]=butter(N,Wn,'s')
```

格式(1)是设计低通数字滤波器，格式(2)是设计低通模拟滤波器。B、A 是 $H(z)$的分子、分母多项式的系数向量，Wn 是截止频率。

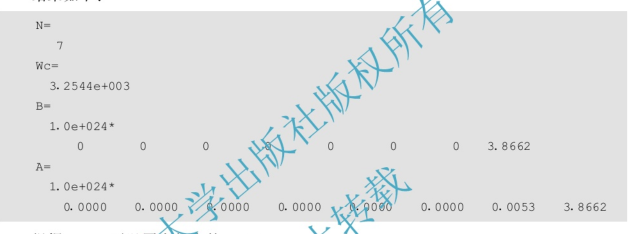
例 7-14 设计一个模拟巴特沃斯低通滤波器，其技术指标为

通带边界频率 $f_p=400\text{Hz}$，通带最大衰减 $\alpha_p=0.5\text{dB}$；阻带边界频率 $f_s=1000\text{Hz}$，阻带最小衰减 $\alpha_s=40\text{dB}$。

程序：

```
Wp=2*pi*400;Ws=2*pi*1000;
ap=0.5;as=40;
[N,Wc]= buttord(Wp,Ws,ap,as,'s');% 求阶数 N 和 3dB 截止频率 Wc
[B,A]= butter(N,Wc,'s');%求系统函数
```

结果如下：



```
N=
   7
Wc=
  3.2544e+003
B=
  1.0e+024*
       0          0          0          0          0          0          0     3.8662
A=
  1.0e+024*
    0.0000     0.0000     0.0000     0.0000     0.0000     0.0000     0.0053     3.8662
```


根据 B、A 可以写出相应的 $H(z)$。

例 7-15 采用脉冲响应不变法设计一个巴特沃斯低通数字滤波器，其通带上限临界频率为 400Hz，阻带临界频率为 600Hz，抽样频率是 1000Hz，在通带内的最大衰减为 0.3dB，阻带内的最小衰减为 60dB。

程序：

```
Wp=2*pi*400;Ws=2*pi*600;
ap=0.3;as=60;Fs=1000;
[N,Wc]=buttord(Wp,Ws,ap,as,'s');%求阶数 N 和 3dB 截止频率 Wc
[Z,P,K]=buttap(N);
[A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K);%将模拟滤波器的零、极点形式转换为状态空间形式
[At,Bt,Ct,Dt]=lp2lp(A,B,C,D,Wc);%去归一化
[num1,den1]=ss2tf(At,Bt,Ct,Dt);%由状态空间形式转换为模拟系统函数的系数
[num2,den2]=impinvar(num1,den1,Fs);%求数字系统函数
[H,W]=freqz(num2,den2);
plot(W*Fs/2/pi,abs(H));grid;
xlabel('频率/Hz');
ylabel('幅值');
```

运行结果图如图 7.32 所示。

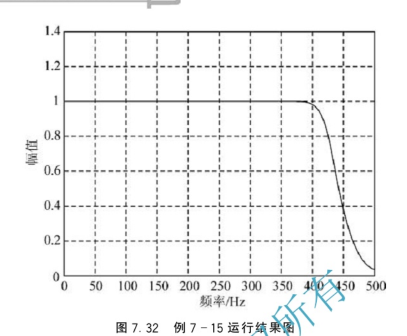


图 7.32　例 7-15 运行结果图

例 7-16　采用双线性变换法设计一个巴特沃斯低通数字滤波器，要求在通带[0，0.2π]内衰减不大于 3dB，在阻带[0.6π，π]内衰减不小于 40dB。

程序：

```
wp=0.2;ws=0.6;
ap=3;as=40;% 注意 wp,ws 是关于 π 的归一化的值
[N,wc]=buttord(wp,ws,ap,as);%求数字滤波器阶数 N 和 3dB 截止频率 wc
[B,A]=butter(N,wc);%调用 butter 计算数字滤波器系统函数系数向量 B 和 A
[H,W]=freqz(B,A);
plot(W*Fs/2/pi,abs(H));grid;
xlabel('频率/Hz');
ylabel('幅值');
```

运行结果图如图 7.33 所示。

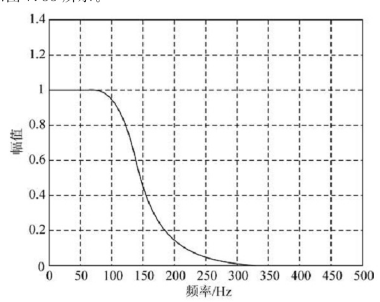


图 7.33　例 7-16 运行结果图



7.6.2 应用 MATLAB 设计 FIR 数字滤波器

FIR 滤波器的设计问题在于——寻找一个系统函数 $H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$，使其频率响应 $H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$ 逼近 $H_d(e^{j\omega})$。若要求 FIR 滤波器具有线性相位特性，则 $h(n)$必须满足对称条件。窗函数法又称傅里叶级数法，是设计 FIR 数字滤波器的最简单的方法。

MATLAB 中用 fir1 函数来设计具有标准频率响应的 FIR 滤波器。其调用方式如下。

```
b=fir1(n,wn)——设计 n 阶低通 FIR 滤波器,返回的向量 b 为滤波器的系数(即 h(n)的值),它的阶数为 n+1;截止频率为 wn(对 π 归一化后的值);
b=fir1(n,wn,'hign')——设计 n 阶高通 FIR 滤波器;
b=fir1(n,wn,'low')——设计 n 阶低通 FIR 滤波器;
b=fir1(n,wn,'bandpass')——设计 n 阶带通 FIR 滤波器;
b=fir1(n,wn,'stop')——设计 n 阶带阻 FIR 滤波器;
b=fir1(n,wn,win)——输入参数 win 用来指定使用的窗函数的类型,其长度为 n+ 1,缺省情况下,默认为汉明窗。
```

例 7-17 用矩形窗、三角窗、汉宁窗、汉明窗分别设计低通数字滤波器。信号采样频率为 1000Hz，数字滤波器的截止频率为 100Hz，滤波器的阶数为 80。

程序：

```
passrad=2*pi*100/1000;
w1=boxcar(81);%矩形窗
w2=triang(81);%三角窗
w3=hanning(81);%汉宁窗
w4=hamming(81);%矩形窗
n=1:1:81;hd=sin(passrad*(n- 41))./(pi*(n- 41));
hd(41)=passrad/pi;h1=hd.*rot90(w1);h2=hd.*rot90(w2);
h3=hd.*rot90(w3);h4=hd.*rot90(w4);[MAG1,RAD]=freqz(h1);
[MAG2,RAD]=freqz(h2);[MAG3,RAD]=freqz(h3);[MAG4,RAD]=freqz(h4);
subplot(2,2,1);
plot(RAD,20*log10(abs(MAG1)));
grid on;
subplot(2,2,2);
plot(RAD,20*log10(abs(MAG2)));
grid on;
subplot(2,2,3);
plot(RAD,20*log10(abs(MAG3)));
grid on;
subplot(2,2,4);
plot(RAD,20*log10(abs(MAG4)));grid on;
```

运行结果图如图 7.34 所示。

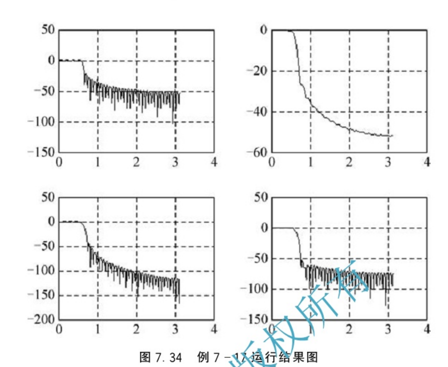


图 7.34　例 7－17 运行结果图

例 7－18　用窗函数法设计一个 FIR 带通滤波器。指标如下：

阻带下截止频率：$\omega_{ls}=0.2\pi$；通带下截止频率：$\omega_{lp}=0.35\pi$；

阻带上截止频率：$\omega_{us}=0.8\pi$；通带上截止频率：$\omega_{up}=0.65\pi$；

通带最大衰减：$\alpha_p=1\text{dB}$；阻带最小衰减：$\alpha_s=60\text{dB}$；

程序：

```
  wls=0.2*pi;wlp=0.35*pi;wup=0.65*pi;
  B=wlp-wls;%过渡带宽度
  N=ceil(12*pi/B);%计算阶数 N,ceil(x)是取大于等于 x 的整数
wp=[wlp/pi-6/N,wup/pi+6/N];%设置理想带通截止频率(关于 π 归一化)
hn=fir1(N- 1,wp,Blackman(N));
M=1024;
Hk=fft(hn,M);
n=0:N- 1;
subplot(2,1,1);
stem(n,hn,'.');
xlabel('n');ylabel('h(n)');
grid on;
k=1:M/2+1;
w=2*(0:M/2)/M;
subplot(2,1,2);
plot(w,20*log10(abs(Hk(k))));
axis([0,1,-100,5]);
xlabel('w/pi');ylabel('20lg|H(w)|');
grid on;
```

运行结果图如图 7.35 所示。





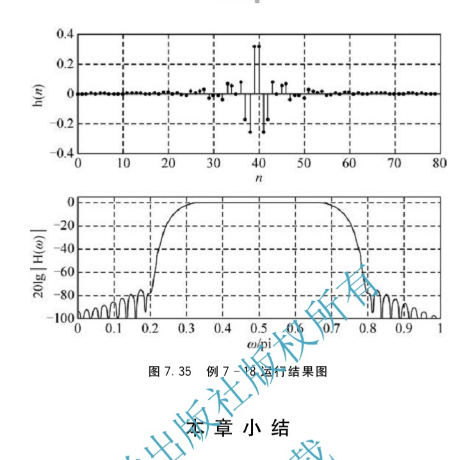


图 7.35 例 7-18 运行结果图

本章小结

本章讨论数字滤波器的设计。数字滤波器包括 IIR 和 FIR 滤波器，其设计过程就是根据设计指标求系统函数的过程。满足要求的系统函数求出后，再根据情况选择相应的滤波器结构，编程实现。主要内容小结如下。

1. 数字滤波器设计的预备知识

包括了滤波的概念、滤波器的分类、数字滤波器的设计指标等。

2. 利用模拟滤波器设计 IIR 数字滤波器

包括了模拟低通滤波器的设计方法，用脉冲响应不变法和双线性变换法设计 IIR 数字低通滤波器，高通、带通 IIR 数字滤波器设计。

3. FIR 数字滤波器设计

包括了线性相位 FIR 数字滤波器及其特点，用窗函数设计 FIR 数字滤波器的方法。

4. 滤波器的基本网络结构

包括了数字滤波器的系统函数与其网络结构流图之间的相互转换方法，IIR 和 FIR 系统的基本网络结构及其各自的特点。

5. 基于 MATLAB 语言的滤波器设计

MATLAB 在滤波器设计中的应用及典型例题解析。



对于一些事先并不知道所需要进行操作的参数的应用，如一些噪声信号的特性，要求使用自适应的系数进行处理。在这种情况下，通常使用自适应滤波器。自适应滤波器是根据环境的改变，使用自适应算法来改变滤波器的参数和结构的滤波器。一般情况下，不改变自适应滤波器的结构。而自适应滤波器的系数是由自适应算法更新的时变系数，即其系数自动连续地适应于给定信号，以获得期望响应。自适应滤波器的最重要的特征就在于它能够在未知环境中有效工作，并能够跟踪输入信号的时变特征。

自适应滤波器使用期望和反馈来综合调整滤波器系数以及频率响应。常用来去除工频干扰，分离胎儿 ECG 信号，增强 P 波，去掉心电图中伪迹等。

通常情况下，理想滤波的基本前提是得到信号和干扰的特性，通常假定两种信号稳定或者广义上稳定。常用的自适应滤波技术有最小均方(LMS)自适应滤波器、递推最小二乘(RLS)滤波器、格型滤波器和无限冲激响应(IIR)滤波器等。这些自适应滤波技术的应用又包括自适应噪声抵消、自适应谱线增强和陷波等。

习　　题

7-1　设计一个巴特沃斯低通滤波器，要求通带截止频率 $f_p=6\text{kHz}$，通带最大衰减 $\alpha_p=3\text{dB}$，阻带截止频率 $f_s=12\text{kHz}$，阻带最小衰减 $\alpha_s=15\text{dB}$。求出滤波器归一化传输函数 $H_a(p)$以及实际的 $H_a(s)$。

7-2　已知模拟滤波器的传输函数为

(1) $H_a(p)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$；(2) $H_a(p)=\dfrac{1}{2s^2+3s+1}$

试用脉冲响应不变法和双线性变换法分别将其转换为数字滤波器，设 $T=2\text{s}$。

7-3　试分析脉冲响应不变法设计数字滤波器的基本思想、方法及其局限性。

7-4　图 7.36 为一个数字滤波器的频率响应。

(1) 当采用冲激响应不变法时，试求原型模拟滤波器的频率响应。

(2) 当采用双线性变换法时，试求原型模拟滤波器的频率响应。

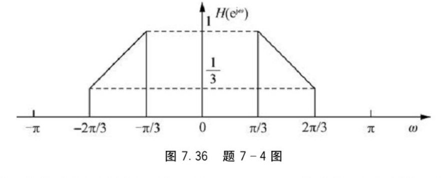


图 7.36　题 7-4 图

7-5　用双线性变换法设计一个 3 阶 Butterworth 数字带通滤波器，抽样频率 $f_s=720\text{Hz}$，上下边带截止频率分别为 $f_1=60\text{Hz}$ 和 $f_2=300\text{Hz}$。并写出相应的 MATLAB 程序，用 MATLAB 画出损耗函数曲线和相频特性曲线。



7-6　设计低通数字滤波器，要求通带内频率低于 0.2πrad 时，容许幅度误差在 1dB 之内；频率在 0.3π～πrad 之间的阻带衰减大于 10dB；试采用巴特沃斯型模拟滤波器进行设计，用脉冲响应不变法进行转换，采样间隔 $T=1\text{ms}$。

7-7　利用窗函数法设计 FIR 滤波器时，如何选择窗函数？

7-8　什么是吉布斯(Gibbs)现象？窗函数的旁瓣峰值衰耗和滤波器设计时的阻带最小衰耗各指什么，有什么区别和联系？

7-9　何为线性相位滤波器？FIR 滤波器成为线性相位滤波器的充分条件是什么？

7-10　对下面的每一种滤波器指标，选择满足 FIRDF 设计要求的窗函数类型和长度。

(1) 阻带衰减为 20dB，过渡带宽度为 1kHz，采样频率为 12kHz。

(2) 阻带衰减为 50dB，过渡带宽度为 2kHz，采样频率为 20kHz。

(3) 阻带衰减为 50dB，过渡带宽度为 500Hz，采样频率为 5kHz。

7-11　用窗函数法设计一个线性相位低通 FIR 滤波器，要求通带截止频率为 π/4 rad，过渡带宽度为 8π/51 rad，阻带最小衰减为 45dB。

(1) 选择合适的窗函数及其长度，求出 $h(n)$ 的表达式。

(2*) 用 MATLAB 画出损耗函数曲线和相频特性曲线。

7-12　要求用数字低通滤波器对模拟信号进行滤波，要求：通带截止频率为 10kHz，阻带截止频率为 22kHz，阻带最小衰减为 75dB，采样频率为 $F_s=50\text{kHz}$。用窗函数法设计数字低通滤波器。

(1) 选择合适的窗函数及其长度，求出 $h(n)$ 的表达式。

(2*) 用 MATLAB 画出损耗函数曲线和相频特性曲线。

7-13　设系统用下面的差分方程描述：

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1),$$

试画出系统的直接型、级联型和并联型结构。

7-14　设某 FIR 数字滤波器的冲激响应，$h(0)=h(7)=1$，$h(1)=h(6)=3$，$h(2)=h(5)=5$，$h(3)=h(4)=6$，其他 n 值时 $h(n)=0$。试求 $H(e^{j\omega})$ 的幅频响应和相频响应的表示式，并画出该滤波器流图的线性相位结构形式。

7-15　有人设计了一只数字滤波器，得到其系统函数为

$$H(z)=\frac{0.2871-0.4466z^{-1}}{1-1.2971z^{-1}+0.6949z^{-2}}+\frac{-2.1428+1.1455z^{-1}}{1-1.0691z^{-1}+0.3699z^{-2}}+\frac{1.8557-0.6303z^{-1}}{1-0.9972z^{-1}+0.2570z^{-2}}$$

请采用并联型结构实现该系统。

7-16　用级联型结构和并联型结构实现以下传递函数：

(1) $H(z)=\dfrac{3z^3-3.5z^2+2.5z}{(z^2-z-1)(z-0.5)}$

(2) $H(z)=\dfrac{4z^3-2.8284z^2+z}{(z^2-1.4142z+1)(z+0.7071)}$

7-17　用横截型结构实现以下系统函数：

$$H(z)=(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+6z^{-1})(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{6}z^{-1})(1-z^{-1})$$

7-18　设某FIR数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{5}(1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+z^{-4})$$

试画出此滤波器的线性相位结构。

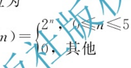
7-19　画出由下列差分方程定义的因果线性离散时间系统的直接Ⅰ型、直接Ⅱ型、级联型和并联型结构的信号流程图，级联型和并联型只用1阶节。

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

7-20　用级联型及并联型结构实现系统函数：

$$H(z)=\frac{2z^3+3z^2-2z}{(z^2-z+1)(z-1)}$$

7-21　已知滤波器单位抽样响应为



$$h(n)=\begin{cases}2^n, & 0\leqslant n\leqslant 5\\ 0, & 其他\end{cases}$$

画出横截型结构。

7-22　用卷积型和级联型网络实现系统函数：$H(z)=(1-1.4z^{-1}+3z^{-2})(1+2z^{-1})$

7-23　仔细观察图7.37所示。

(1) 这是什么类型具有什么特性的数字滤波器？

(2) 写出其差分方程和系统函数。

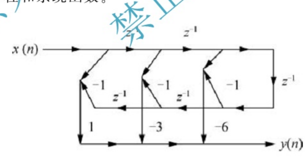


图7.37　题7-23图

第8章 数字信号处理的实现和应用

本章教学要求

- 了解实现数字信号处理的方法。
- 掌握数字信号处理系统的基本构成。
- 了解 DSP 芯片的基本特点。
- 理解运用 FPGA 实现数字信号处理模块的方法。

推荐阅读资料

[1] 彭启琮．现代 DSP 技术[M]．北京：高等教育出版社，2007.
[2] 潘松．现代 DSP 技术[M]．西安：西安电子科技大学出版社，2004.



自有线电话诞生以来，人们就期待实现无线电话的出现。后来，出现了模拟移动电话，但由于模拟技术具有难以克服的局限性，因此科学家们就开始利用数字技术研制数字式移动电话。在研制过程中科学家发现，通话双方的语音信号会发生延迟，使人的耳朵听起来有时断时续的感觉，而且通话中时常会出现回音，使人听不清对方说的话，这些都困扰着科学家们。图 8.1 为使用数字信号处理芯片的移动电话。





图 8.1　使用数字信号处理芯片的移动电话

后来，科学家们在在移动电话中采用了数字信号处理芯片(DSP)，这是一款快速强大的微处理器，它的独特之处在于它能即时处理资料，正是这项即时处理能力使得DSP最适合对付通话中无法容忍任何延迟，从而使今日的手机能允许用户以正常方式交谈；DSP以现实世界的声音信号为目标，透过数学运算改变语音的特性，消除背景杂音，进而提供清澈无比的通话品质；DSP还能压缩压缩语音信号，使之能以更高速率传输，提高传输效率。

步入21世纪以来，人类社会已进入数字化时代，数字信号处理技术是数字化社会最重要的技术之一。广泛应用于通信、语音图像处理、消费电子和工业控制等许多领域。数字信号处理包含如下两方面的内容。

(1) 数字信号处理的算法：解决具体问题的数学方案的研究。

(2) 数字信号处理的实现：使用软件、硬件或软硬件结合来实现算法。

本书前几章讲述的就是数字信号处理的算法问题，本章简述一下数字信号处理的实现问题。

8.1 数字信号处理的实现

数字信号处理的实现，目前一般采用两类方法：一类是采用通用或专用的DSP芯片；另一类是采用现场可编程门阵列(FPGA)生成特定的数字信号处理硬件模块。

8.1.1 数字信号处理系统的构成

一个典型的DSP系统包括抗混叠滤波器、数据采集A/D转换器、数字信号处理器件、D/A转换器和低通滤波器等，其组成框图如图8.2所示。

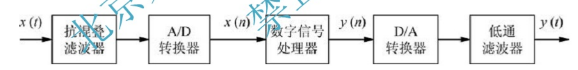


图8.2 数字信号处理系统的组成框图

人类所处的现实世界是一个模拟信号的世界，如声、光、温度、压力等都是模拟信号，而使用数字处理方法有诸多便利，所以在进行数字处理前需要进行模数转换。如图8.2所示，输入信号$x(t)$首先进行抗混叠滤波，滤掉高于折叠频率的分量，以防止信号频谱的混叠，然后经采样和A/D转换器，将滤波后的信号转换为数字信号$x(n)$。这样，才能送入数字信号处理器件进行算法处理，得到数字信号$y(n)$，数字信号处理器件既可以是通用或专用的DSP芯片，也可以是由FPGA生成的专用数字信号处理器。处理后的数字信号$y(n)$经D/A转换器，将$y(n)$转换成模拟信号，最后经低通滤波器，滤除高频分量，得到平滑的模拟信号$y(t)$。

并不是所有的DSP系统必须包含框图中的所有部分。例如，语音系统的输出就不需要模拟波形，而是数字和文字，因而也就不需要数字信号处理器件后面的模拟转换部分。数字信号处理器件可以是一个也可以是多个器件。这都取决于对信号处理的具体要求。

8.1.2　基于DSP芯片的数字信号处理的实现

数字信号处理器(DSP)是一种特别适合于进行数字信号处理运算的微处理器，它速度极快、功能强大，且能够实时快速地实现各种数字信号处理的算法。

在20世纪80年代以前，由于受集成电路技术的限制，因此数字信号处理的理论还不能得到广泛的应用。直到20年及80年代初，第一块单片可编程DSP芯片的诞生，才使理论研究成果广泛应用到实际的系统中，并且推动了新的理论和应用领域的发展。可以毫不夸张地讲，DSP芯片的诞生及发展对通信、计算机、控制等领域的技术发展起到十分重要的作用。

使用DSP芯片的数字信号处理系统，精度高、稳定性好、高速实时、接口丰富。DSP芯片是一款可编程芯片，支持汇编语言、C/C++语言。著名的DSP芯片制造商都开发出来高效、方便的集成开发工具，为数字信号处理系统的设计者提供了方便。例如，TI公司的CCS，ADI公司的VisualDSP++等。

目前，在生产通用DSP的厂家中，最有影响的公司有TI公司、ADI公司、Lucent公司、Motorola公司和NEC公司。

按照用途的不同，可将DSP芯片分为通用型和专用型两大类。通用型DSP芯片：一般是指可以用指令编程的DSP芯片，适合于普通的DSP应用，具有可编程性和强大的处理能力，还可完成复杂的数字信号处理的算法。专用型DSP芯片：它是指为特定的DSP运算而设计的芯片，通常只针对某一种应用，相应的算法由内部硬件电路实现，适合于数字滤波、FFT、卷积和相关算法等特殊的运算。主要用于要求信号处理速度极快的特殊场合。

根据芯片工作的数据格式，按其精度或动态范围不同，可将通用DSP划分为定点DSP和浮点DSP两类。若数据以定点格式工作，则称为定点DSP芯片；若数据以浮点格式工作则称为浮点DSP芯片。不同的浮点DSP芯片所采用的浮点格式有所不同，有的DSP芯片采用自定义的浮点格式，有的DSP芯片则采用IEEE的标准浮点格式。

下面谈谈DSP芯片特点和使用DSP芯片的设计过程。

1. DSP芯片的特点

DSP芯片的良好性能，得益于本身具有的与众不同的特点。因为数字信号处理不同于普通的科学计算与分析，它强调运算的实时性。所以，除了具备普通微处理器所强调的高速运算和控制能力外，针对实时数字信号处理的特点，在处理器的结构、指令系统、指令流程上作了很大的改进，其主要特点如下。

1) 采用哈佛结构

DSP芯片普遍采用数据总线和程序总线分离的哈佛结构或改进的哈佛结构，比传统处理器的冯·诺依曼结构有更快的指令执行速度。

改进型的哈佛结构是采用双存储空间和数条总线，即一条程序总线和多条数据总线。允许在程序空间和数据空间之间相互传送数据，使这些数据可以由算术运算指令直接调



用，增强芯片的灵活性；提供了存储指令的高速缓冲器(Cache)和相应的指令，当重复执行这些指令时，只需读入一次就可连续使用，不需要再次从程序存储器中读出，从而减少了指令执行作需要的时间。如 TMS320C6200 系列的 DSP，整个片内程序存储器都可以配制成高速缓冲结构。

2）采用多总线结构

DSP 芯片都采用多总线结构，可同时进行取指令和多个数据存取操作，并由辅助寄存器自动增减地址进行寻址，使 CPU 在一个机器周期内可多次对程序空间和数据空间进行访问，大大地提高了 DSP 的运行速度。如 TMS320C54x 系列内部有 P、C、D、E 共 4 组总线，每组总线中都有地址总线和数据总线，这样在一个机器周期内可以完成如下操作：从程序存储器取一条指令、从数据存储器读两个操作数和向数据存储器写一个操作数。

3）采用流水线技术

DSP 芯片执行一条指令包括取指、译码、取操作数和执行 4 个阶段。利用这种流水线结构，在执行一条指令的同时，还依次执行后面指令的处理工作，增强处理能力。加上执行重复操作，就能保证在单指令周期内完成数字信号处理中用得最多的乘法累加运算。例如：

$$y=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i$$

4）配有专用的硬件乘法-累加器

为了适应数字信号处理的需要，DSP 芯片都配有专用的硬件乘法-累加器，可在一个周期内完成一次乘法和一次累加操作，从而可实现数据的乘法-累加操作。能完成如矩阵运算、FIR 和 IIR 滤波、FFT 变换等专用信号的处理。

5）具有特殊的 DSP 指令

为了满足数字信号处理的需要，在 DSP 的指令系统中，设计了一些完成特殊功能的指令。如 TMS320C54x 中的 FIRS 和 LMS 指令，专门用于完成系数对称的 FIR 滤波器和 LMS 算法。

6）快速的指令周期

由于采用哈佛结构、流水线操作、专用的硬件乘法器、特殊的指令以及集成电路的优化设计，使指令周期可在 20ns 以下。如 TMS320C54x 的运算速度为 100MIPS，即 100 百万条/秒。

7）硬件配置强

新一代的 DSP 芯片具有较强的接口功能，除了具有串行口、定时器、主机接口(HPI)、DMA 控制器、软件可编程等待状态发生器等片内外设外，还配有中断处理器、PLL、片内存储器、测试接口等单元电路，可以方便地构成一个嵌入式自封闭控制的处理系统。

8）支持多处理器结构

为了满足多处理器系统的设计，许多 DSP 芯片都采用支持多处理器的结构。如 TMS320C40 提供了 6 个用于处理器间高速通信的 32 位专用通信接口，使处理器之间可直

接对通，应用灵活、使用方便。

9）省电管理和低功耗

DSP 功耗一般为 0.5～4W，若采用低功耗技术，则可使功耗降到 0.25W；可用电池供电，适用于便携式数字终端设备。

2. DSP 应用系统的设计过程

DSP 应用系统的设计和开发过程框图如图 8.3 所示。根据图 8.3 中的设计过程，DSP 应用系统的设计和开发可分为以下步骤。

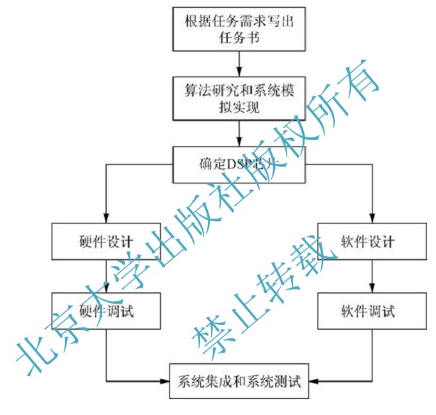


图 8.3 DSP 应用系统的设计和开发过程框图

(1) 明确设计任务，确定设计目标。这一步要定义系统的技术性能指标，包括采样频率和实时处理性能、存储器容量、系统精度、应用环境、体积、重量、功耗、成本等。

(2) 算法模拟，确定性能指标。根据系统的设计任务和设计目标，首先进行算法仿真并在 MATLAB 上进行模拟实现，以此确定最佳算法，然后根据算法确定相应的参数。

(3) 选择 DSP 芯片和外围芯片。根据算法的要求，确定运算速度、运算精度和存储器的大小速度。然后，确定 DSP 芯片和外围芯片。

(4) 设计实时的 DSP 应用系统。设计分为软件设计和硬件设计两部分。硬件设计包括确定系统的硬件组成方案、原理图设计、印制电路板设计等；软件设计是指用汇编语言、C 语言或两者的混合语言设计程序。

(5) 硬件和软件调试。硬件调试可在 DSP 硬件仿真器或专用开发板上进行，软件仿真可在集成开发工具，如 CCS 上进行。

（6）系统集成和测试。当软硬件调试完成后，将软件程序固化，与硬件结合做成样机。样机完成后，在实际系统中运行。在运行中测试系统性能，评估系统的性能指标是否达到设计要求。在这个过程中，要反复检验系统的实时性、精度和稳定性。如果不能达到要求，就需要重新修改软件或硬件，直到达到要求为止。



小知识：

TI 公司的集成开发环境 CCS(Code Composer Studio)提供了环境配置、源文件编辑、程序调试、跟踪和分析等工具，可以帮助用户在一个软件环境下完成编辑、编译链接、调试和数据分析等工作。

8.1.3 基于 FPGA 的数字信号处理的实现

在过去很长一段时间内，DSP 处理器是 DSP 应用系统核心器件的唯一选择。但 DSP 处理器由于自身硬件结构的特点，不适合于结构特性随时变更的应用场合，且在灵活处理各种算法时存在不足之处，主要表现在如下几个方面。

（1）其硬件结构的不可变性导致了其总线的不可改变性。而固定的数据总线宽度，已成为 DSP 处理器的一个难以突破的瓶颈。

（2）DSP 处理器大量运算顺序指令，需要耗费较多的时钟周期，使算法的处理达不到实时性要求。

（3）在硬件加速方面，DSP 无法根据特定的设计需要来做任何更改，特别是面向当今不断发生的各种技术标准和协议的变更。

（4）使用固定的数字信号处理器，需要较多的外设，不利于集成度的提高。

目前，大容量、高速度、低成本的 FPGA 的出现，克服了使用数字信号处理器的诸多不足。现场可编程门阵列(FPGA)是一类可编程的数字集成电路。其核心是可编程逻辑块和模块间的可编程互联。设计工程师可以通过编程在 FPGA 上实现各种功能，主要表现在如下几个方面。

（1）在硬件方面，一般 FPGA 都内嵌有可配置的高速 RAM、PLL、硬件乘法累加器等 DSP 模块。用 FPGA 来实现数字信号处理可以很好地解决并行性和速度问题，而且其灵活的可配置特性，使得 FPGA 构成的 DSP 系统非常易于修改、易于测试及硬件升级。

（2）在软件方面，利用 FPGA 开发 DSP 系统，有了全新的设计工具和设计流程。DSP Builder 就是 Altera 公司推出的一个面向 DSP 开发的系统级工具。它集成了 MATLAB/Simulink 工具箱和 FPGA 开发工具，可以进行复杂的数字信号处理系统的图形化建模、参数估计、性能分析。这使得用 FPGA 设计 DSP 系统完全可以通过 Simulink 的图形化界面进行，只要简单地进行 DSP Builder 工具箱中的模块调用即可。

DSP Builder 是 Altera 公司在 2002 年推出的面向 DSP 的开发工具。它将 MATLAB 的 Simulink 和 Quartus II 开发软件连接起来。设计人员首先在 MATLAB 软件中进行算法设计，然后在 Simulink 软件中进行系统集成，最后将设计转换为硬件描述语言(HDL)文

件，利用 Quartus II 软件中进行综合、编译仿真和硬件测试。

1. DSP Builder 功能简介

DSP Builder 开发平台具有一个友好的开发环境。它可以帮助设计人员创建一个 DSP 设计的硬件模型，以此来缩短 DSP 开发的周期。DSP Builder 开发平台将 MATLAB 的 Simulink 模块与 Altera 的 DSP Builder 模块和 Altera 的 MegaCore 功能模块组合在一起，从而使系统级的设计和 DSP 算法的实现连接在一起。

DSP Builder 工具与 SOPC Builder 工具结合，构建了 Simulink 设计、Altera 嵌入式处理器以及 IP 内核的通用的开发平台。对于在使用可编程逻辑设计软件方面缺乏经验的设计人员来说，该设计流程非常方便、直观。

DSP Builder 的主要功能如下。

(1) 软件不断更新，确保支持最新的 Altera 器件系列。

(2) 软件设计完成后，使用 Altera DSP 开发板，能迅速实现原型设计。

(3) 能够和硬件一起，实现 Simulink 系统级协同仿真，并提供高级调试功能。

(4) 支持 SignalTap II 逻辑分析仪，能探测 DSP 板上的 Altera 器件信号，并将数据导入 MATLAB 工作空间，方便直观分析。

(5) 能方便地构建定制逻辑模块，配合 Nios II 嵌入式处理器和其他 SOPC Builder 工作。

(6) 能很方便地使用锁相环(PLL)模块和状态机模块。

(7) 支持按位和按周期精确精度的设计仿真。

(8) 支持 DSP 系统算法和执行的统一表示。

(9) 能够自动生成 VHDL 或 Verilog HDL 测试平台文件，或者能自动地从 MATLAB 和 Simulink 测试向量中自动生成 Quartus II 向量文件(.vec)。

(10) 能自动启动 Quartus II 编译。

(11) 支持 Simulink 软件使用的各种定点算法和逻辑操作。

2. DSP Builder 设计流程

DSP Builder 设计首先在 Simulink 中建立设计模型。设计模型建立之后，DSP Builder 将设计转换为 Verilog HDL 或 VHDL 硬件描述语言。随后，DSP Builder 调用 Quartus II 的相关功能完成综合、布局布线等工作，还可使用 SignalTap II 在 DSP Builder 中在线调试。利用 DSP Builder 完成 DSP 应用设计的设计流程，DSP Builder 设计流程框图如图 8.4 所示。

具体的操作步骤如下。

(1) 在 MATLAB/Simulink 中建立一个 .mdl 文件，调用 Simulink 和 DSP Builder 模型库中的模型，建立设计模型。

(2) 使用 Simulink 模块分析，分析设计的正确性，用 Scope 模块监视设计的仿真结果。

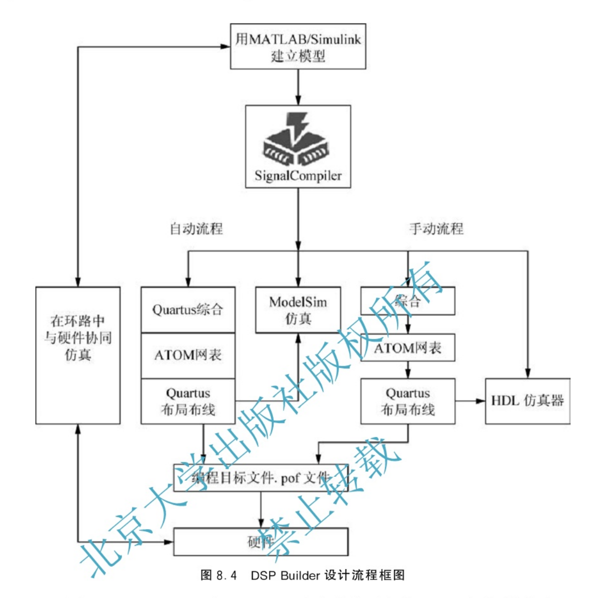


图 8.4　DSP Builder 设计流程框图

(3) 通过 SignalCompiler，把 Simulink 生成的模型文件(.mdl 文件)转化为 HDL 文件。这些文件属于 RTL 级别，可以进行综合。

(4) 对以上设计产生的 VHDL 的 RTL 代码和仿真文件进行综合、编译、适配以及仿真。对于不同用户的不同的设计目的和设计要求，DSP Builder 提供了两种不同的设计流程：自动流程和手动流程。

① 采用 DSP Builder 的自动流程，几乎可以忽略硬件的具体实现过程，DSP Builder 自动调用 Quartus II 等设计软件，完成综合、网表生成和 Quartus II 适配，完成 FPGA 的配置下载过程。如果希望使用其他第三方的 VHDL 综合器和仿真器(除 Synplify、LeonardoSpectrum 和 Quartus II 综合器及 ModelSim 外)，或者希望完成特定的适配设置，如逻辑锁定、时序驱动编译、ESB 特定功能应用等，就采用手动流程设计。

② 在手动流程中，设计者可以灵活地指定综合、适配条件。需要手动地调用 VHDL 综合器进行综合，调用 Quartus II 进行适配，调用 ModelSim 或者 Quartus II 进行仿真，最后生成相应的编程目标文件，用于 FPGA 的配置。

(5) 在多数情况下，当 Quartus II 对设计模块适配后，需要再次验证适配后网表与



Simulink 中建立的 DSP 模型的一致性。这时，需要再次使用 ModelSim，对 Quartus II 适配后带延时信息的网表文件进行仿真。

（6）用 DSP Builder SignalCompiler 模块生成的输出文件实现 RTL 综合。对于带有 Tcl 脚本的 Quartus II、Synthesis，Precision RTL Synthesis 或 LeonardoSpectrum 软件，DSP Builder 支持自动化综合流程。可选择使用其他综合工具，手工综合 VHDL 文件。

（7）将编程目标文件(. pof 文件)下载到一个硬件开发板上并测试。

8.2 数字信号处理的应用

利用 FPGA 可以直接生成数字信号处理硬件模块，替代以前的 DSP 芯片，这种纯硬件结构将有更高的速度和实时性。本节以 Altera 公司的开发工具 DSP Builder 设计 FIR 滤波器为例介绍数字信号处理的算法实现。

FIR(Finite Impulse Response，有限冲激响应)滤波器是数字信号处理中常用的算法，广泛应用在低通滤波、通带选择、抗混叠、抽取和内插等设计中。

8.2.1 使用基本模块的 FIR 滤波器设计

安装了 DSP Builder 后，在 MATLAB 中的 Simulink 库中就嵌入了 DSP Builder 模块库，从库中选取需要的特定模块就可以组成 FIR 滤波器系统，然后进行仿真。

1. FIR 滤波器的原理

FIR 滤波器在数字通信系统中被大量使用，以实现各种各样的功能，如低通滤波、带通滤波、抗混叠、抽样和内插等。FIR 滤波器的冲激响应总是有限长的，其系统函数可以记为

$$H(Z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n} \qquad (8-1)$$

式中：$N-1$ 是 FIR 滤波器的延时节数。此外，FIR 滤波器也可用式(8－2)所示的差分方程表示。

$$y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x(n-m) \qquad (8-2)$$

式中：$x(n)$是输入采样序列；$h(m)$是滤波器系数；$N-1$ 是 FIR 滤波器的延时节数；$y(n)$是滤波器的输出序列。

本节设计的 FIR 滤波器为低通滤波器，其差分方程为

$$y(n)=h(0)x(n)+h(1)x(n-1)+\cdots+h(13)x(n-13)$$

式中：滤波器系数为[6，33，59，84，104，118，127，127，118，104，84，59，33，6]，其结构如图 8.5 所示。

在这个 FIR 滤波器中，总共需要 13 个延时单元，14 个乘法单元，一个 14 输入的加法器。如果采用普通的数字信号处理器，则只能用串行的方式顺序地执行延时、乘加操作，且需要用多个指令周期来完成。如果采用 FPGA 的并行结构来实现，就可以在一个时钟周期内得到一个 FIR 滤波器的输出。

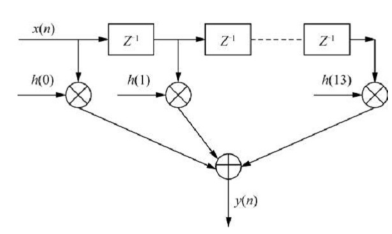


图 8.5　设计滤波器的结构图

在本例中，用一个移位寄存器来实现延时功能，用一个子系统来实现乘法和加法。用 Simulink 模块生成 1MHz 和 16MHz 的两个正弦波作为输入信号，经加法器合成为一个波形，这个波形经过硬件电路组成的低通滤波器后，会滤除 16MHz 的成分，只剩下 1MHz 的成分。达到保留低频信号、滤出高频信号的目的，其模型原理图如图 8.6 所示。

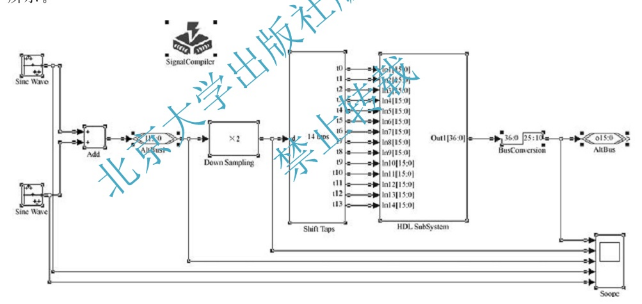


图 8.6　FIR 滤波器模型原理图

2. 建立系统设计模型

与上一节类似，先建立工作库 myfir，启动 MATLAB 环境，把 MATLAB 当前的工作目录切换到工作库文件夹 myfir 下。打开“新建模型”窗口，创建新模型文件 myfir.mdl，接下来的步骤如下。

(1) 加入 Sine Wave 模块。用鼠标将两个 Sine Wave 模块拖到“新建模型”窗口中。分别将其名字修改为 Sine Wave1 和 Sine Wave 2，并设置 Sine Wave 模块参数。本例中两个正弦波的幅度是 2024，采样率都是 80MHz，采样周期为 1.25e－8s。假定 Sine Wave1 频率为 1MHz，因而每个周期的采样点数为 80。



假定 Sine Wave2 频率为 16MHz，因而每个周期的采样点数为 5。参照表 8-1 改变其参数，没有在表 8-1 中列出的参数则保持默认值不变。

表 8-1　Sine Wave1 和 Sine Wave2 的参数

参数名称	Sine Wave1	Sine Wave2
Sine Type(采样类型)	Sample Based	Sample Based
Amplitude(幅值)	2048	2048
Samples Per Period(每周期采样点数)	80	5
Sample Time	1.25e−8	1.25e−8

(2) 加入 add(加法)模块。从 Simulink 中的 Math Operations(数学运算)库中，选择一个 add(加法)模块到“新建模型”窗口中来，可以双击求和模块来改变其参数，这里不需要改变。

(3) 加入 Scope 模块。选择一个 Scope 模块到“新建模型”窗口中来，设置示波器的参数，在 General 标签中将 Number of Axes(轴)的值改为 5，用来显示 5 路信号。将 Time Range 参数改为 4e−4，单击 OK 按钮。弹出修改后的示波器界面，如图 8.7 所示。

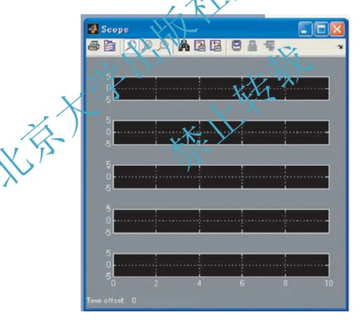
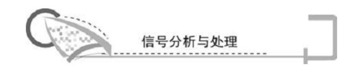


图 8.7　修改后的示波器界面

(4) 加入 SignalCompiler 模块。所有 Simulink 库中的模块都已添加完成，接下来添加 Altera DSP Builder 模块库中的模块。

(5) 加入 Altbus 模块和 BusConversion 模块。从 Altera DSP Builder 模块库中的 IO & BuS 库中选择两个 Altbus 模块和 BusConversion 模块，并拖到“新建模型”窗口中。修改两个 Altbus 模块的名字，分别命名为 Altbusin 和 Altbusout。双击该模块，打开“模块参数设置”对话框，将 Altbusin 模块的 Node Type(节点类型)参数设定为 Input Port；将 Altbusout 模块的 Node Type(节点类型)参数设定为 Output Port；将两个模块的[Number of Bits]参数都设定为 16。



同上，双击 BusConversion 模块，修改 BusConversion 模块的参数，其参数设置见表 8-2 所示。

表 8-2　BusConversion 的参数

参数名称	BusConversion
Bus Type(总线类型)	Signed Integer
Input Number of Bits：(输入位数)	37
Output Number of Bits：(输出位数)	16
Input Bit Connected To Output LSB：(输入连接到输出的 LSB)	10

(6) 加入 Down Sampling(下采样)模块和 Shift Taps(移位寄存器)模块。从 Altera DSP Builder 的 Storage 库中，选择 Down Sampling 模块及 Shift Taps 模块，并拖到“新建模型”窗口中。Down Sampling 的 Down Sampling Rate 参数设为 2，Shift Taps 的 Number of Taps 参数设为 14，Distance Between Taps 参数设为 1，调整 Shift Taps 的尺寸，直到能够看到所有的输出端口，这两个模块用来建立 14 抽头的滤波器。

(7) 建立 14 输入的乘累加器。从 AltLab 库中，选择 HDL SubSystem，如图 8.8 所示，并拖到“新建模型”窗口中。将这个模块改名为 multadd14。这个模块是用来建立子系统的，在主系统中只是作为一个模块。

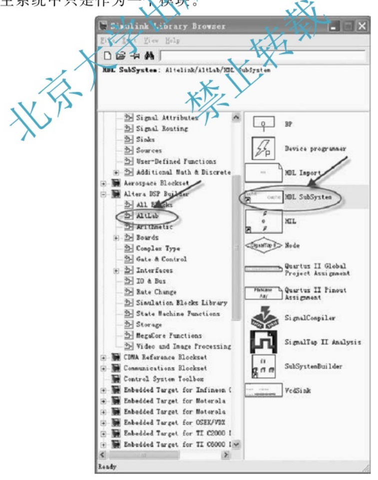


图 8.8　HDL SubSystem 模块

3. 建立子系统的模型

双击上面建立的 multadd14 模块，打开“子系统”界面，如图 8.9 所示。

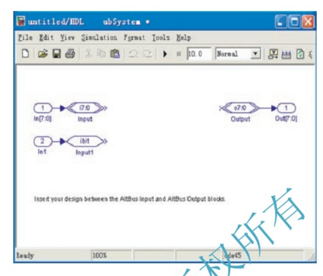


图 8.9　“子系统”界面

首先，删除子系统中的所有内容，然后参照图 8.10 所示建立子系统的模型，步骤如下。

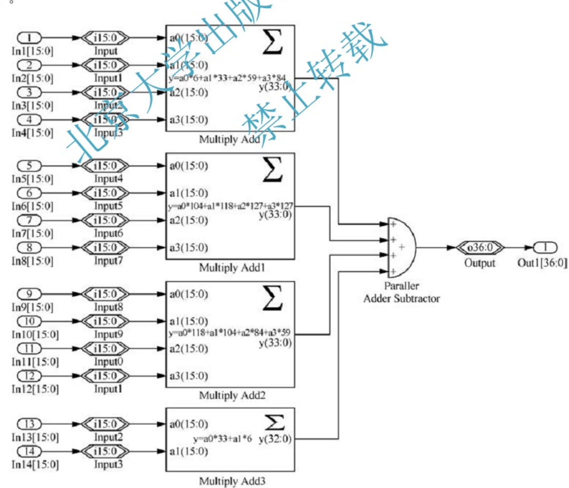


图 8.10　子系统的模型框图

（1）加入 In1 模块和 Out1 模块。选择 Simulink 库中的 Ports & Subsystems 子库，分别从中拖一个 In1 模块和一个 Out1 模块到子系统的模型中。

（2）加入 Input 模块和一个 Output 模块。选择 Altera DSP Builder 库中的 I/O Bus 子库，分别从中拖一个 Input 和一个 Output 模块到子系统的模型中。将 Input 模块的 Bit Width(位宽)改为 16，单击 OK 按钮，并将 In1 模块连接到 Input 模块上。

（3）加入 Multiply Add(乘累加)模块。选择 Altera DSP Builder 库中的 Arithmetic 子库，从中拖一个 Multiply Add 模块到子系统的模型中。取名为 Multiply Add1。双击 Multiply Add 模块，弹出参数设置对话框，如图 8.11 所示，选中 One Input is Constant，单击 Apply 命令按钮，然后单击 OK 按钮。



图 8.11　Multiply Add 模块参数设置对话框

小提醒：

参照以上步骤设置 In2～In14，Input1～Input14 及 Multiply Add2～Multiply Add4。

参照表 8-3 分别设置 4 个乘累加器的参数，如图 8.11 所示。

表 8-3　4 个乘累加器的参数设置

参数名称	Multiply Add 1	Multiply Add 2	Multiply Add 3	Multiply Add 4
Numberof Multipliers	4	4	4	2
Bus Type	Signed Integer	Signed Integer	Signed Integer	Signed Integer
Pipeline Register	No Register	No Register	No Register	No Register
Inputs	16	16	16	16
Adder Mode	Add Add	Add Add	Add Add	Add Add
One Input is Constant	√	√	√	√
Constant Values	[6 33 59 84]	[104 118 127 127]	[118 104 84 59]	[33 6]



（4）加入 Parallel Adder Subtractor（并行加减）模块。选择 Altera DSP Builder 库中的 Arithmetic 子库，从中拖一个 Parallel Adder Subtractor 模块到子系统的模型中。进行参数设置，将 Number of Inputs 设置成 4。

（5）各个模块的连接。将 Output 模块设为 37 位宽，按图 8.6 将各个模块连接起来，组成子系统的模型。最后，保存 multadd14 文件。

按图 8.6 将系统模型的各个模块连接起来，组成系统的模型并且保存 myfir. mdl。

4. *在 Simulink 和 Modelsim 中仿真*

完成模型设计之后，可以先在 Simulink 中对模型进行仿真，检验设计结果是否正确，仿真步骤如下。

（1）在 myfir. mdl 中选择 Simulation | Configuration Parameters 命令，打开仿真参数设置对话框，如图 8.12 所示。

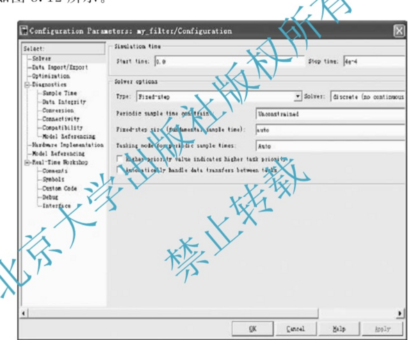


图 8.12　仿真参数设置对话框

将 Start time 设为 0，Stop time 设为 4e－4；将 Solver Options 中的 Type 设为 Fixed－Step，将 Solver 设为 discrete(no continuous states)，按 OK 按钮完成参数设置。

（2）单击▶按钮，启动仿真。

（3）当仿真结束后，双击 Scope 模块，弹出示波器窗口，按🔍按钮自动调整示波器窗口的显示比例，得到图 8.13 所示示波器的 5 路波形。

从仿真波形可以看出，经过 FIR 滤波器之后，1MHz 的低频信号保留下来，而 16MHz 的高频信号被很好地滤除了，设计达到了预定目标。

对模型文件进行的算法及仿真后，针对生成的 RTL 级 VHDL 代码进行功能仿真。打开 ModelSim 环境，选择 tb _ myfir. tcl 来执行。ModelSim 执行 tcl 脚本，随后打开 wave 窗口并显示仿真结果，如图 8.14 所示。

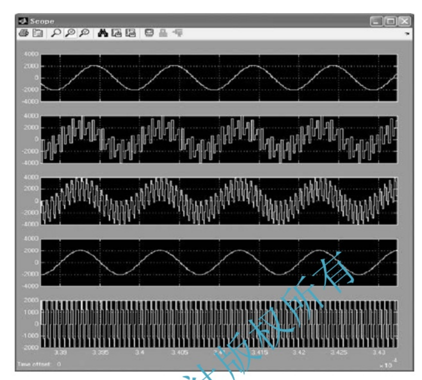


图 8.13 示波器的 5 路波形

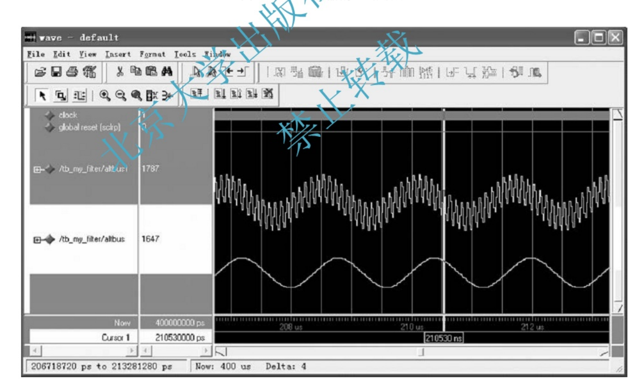


图 8.14 wave 窗口显示的仿真结果

8.2.2 使用 Megacore 函数的 FIR 滤波器设计

为了简化设计和缩短测试时间，Altera 提供了许多可设置参数的 IP Megacore 函数。允许用户在获取特许文件之前，在硬件和仿真时，下载和评估 Altera Megacore 函数。

1. 安装 Megacore 函数

Altera DSP Builder 函数和 QuartusⅡ软件一起安装。在安装新的 Megacore 函数后，需要运行 DSP Builder 设置命令。以确定所有新安装的或升级的 Megacore 函数在 DSP Builder 库中。遵循如下步骤。

（1）启动 MATLAB Simulink 软件。

（2）在 MATLAB 命令窗的提示符下使用 cd 命令，进入安装 DSP Builder 的目录下。

（3）在 MATLAB 命令窗的提示符下，键入 alt _ dspbuilder _ setup _ megacore，再按 Enter 键。

2. 使用 Megacore 函数的设计流程

在 MATLAB/Simulink 环境中，使用 Megacore 函数进行仿真的步骤如下。

（1）把 Megacore 函数模块添加到设计模型中。给该模块取名字，确保名字的唯一性。

（2）对 Megacore 函数进行参数设置。

（3）生成新的 Megacore 函数。

（4）把新的 Megacore 函数和模型中的其他模块相连接。

（5）在设计模型中对该新的 Megacore 函数进行仿真。

3. 使用 Megacore 函数设计 FIR 滤波器

在本节，使用 Megacore 函数库中的 fir _ compiler 函数模块来设计一个低通 FIR 滤波器，以此为例，介绍 Megacore 函数的使用方法。

1）创建新的 Simulink 设计模型

设计之前依然是先做好准备工作，其步骤如下。

（1）打开 MATLAB/Simulink 软件，并切换到工作目录。

（2）选择 File｜New｜Model 命令，弹出新的设计模型窗口，取名并保存。

2）把 fir _ compiler 函数添加到模型中

（1）在 Simulink Library Browser 中，从 Altera DSP Builder 库中选择 MegaCore Function 子库。在子库中选择 fir-compiler 函数，并拖到新的设计模型窗口，如图 8.15 和图 8.16 所示。

（2）在新的设计模型窗口中，这个模块的名字采用的是默认名，需要对它重新命名，重新命名为“my _ fir _ compiler”，以确保唯一。

3）对 fir _ compiler 函数进行参数设置

为了使 fir _ compiler 生成的新 Megacore 函数适合设计需求，需要参数设置。

（1）在在设计模型窗口中，双击 FIR Compiler 模块，弹出如图 8.17 所示的设置窗口。

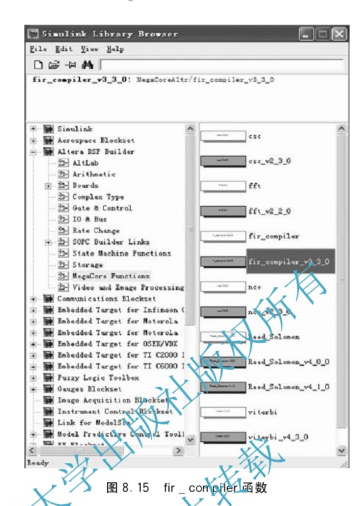
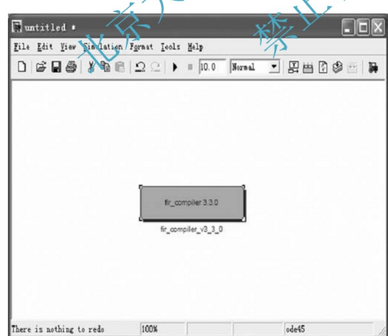


图 8.15　fir _ compiler 函数



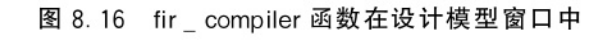

图 8.16　fir _ compiler 函数在设计模型窗口中



图 8.17　FIR Compiler
模块设置窗口图

（2）单击 Step1：parameterize 按钮，弹出 Parameterize－FIR Compiler 参数设置对话框，如图 8.18 所示。界面中的设置为默认设置。这里使用默认值，单击 Finish 按钮。

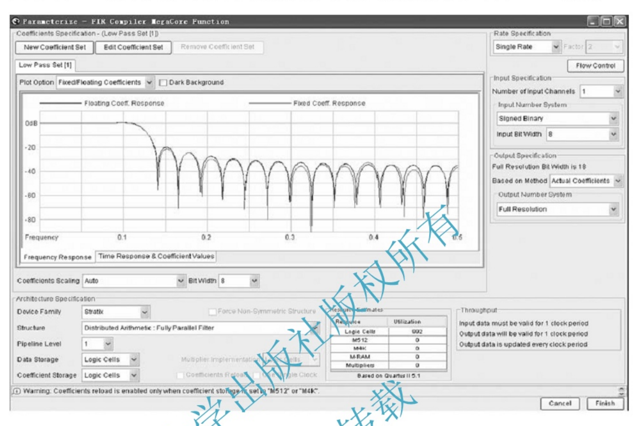


图 8.18　Parameterize－FIR Compiler 参数设置对话框

（3）在完成 FIR Compiler 模块的参数设置后，可以生成需要的 Simulink 模型和仿真文件，单击 Step2：Generate 按钮，弹出设计的报告文件窗口，如图 8.19 所示。

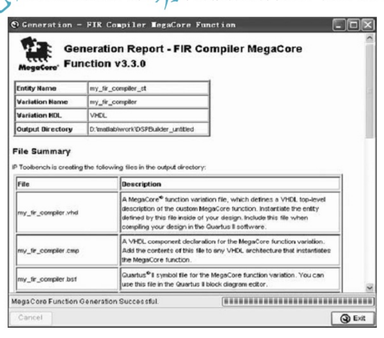


图 8.19　报告文件窗口

在报告文件窗口，单击 Exit 按钮退出。完成以上操作后，放置在设计模型中的模块出现变化，原来的 FIR Compiler 模块成为了具体的、参数化了的新模块，如图 8.20 所示。

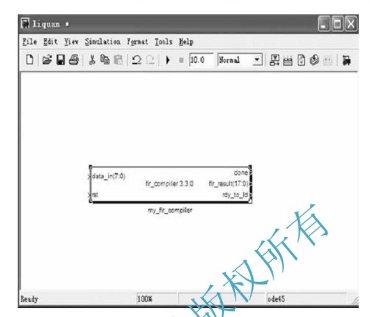


图 8.20　生成的新模块

4）添加其他模块，构成系统模型

添加其他模块，构成如图 8.21 所示的低通滤波器系统模型。从 Simulink | Source 库中，添加两个 Sine Wave 模块，参数设置见表 8－4，未说明的参数采用默认值。

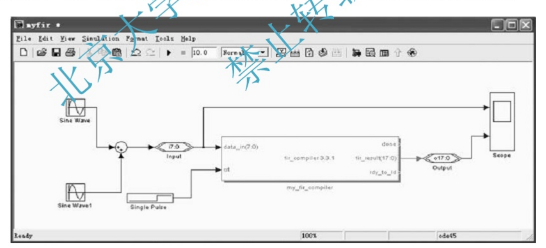


图 8.21　低通滤波器系统模型

表 8－4　两个 Sine Wave 模块参数设置

参数	sine wave	sine wave1
Sine type	Sample based	Sample based
Amplitude	64	64
Samples Per Period	200	7
Sample Time	1	1

从 Altera DSP Builder|IO&BUS 库中，添加 Input 模块和 Outpu 模块。Outpu 模块的[Number of Bits].[]参数设为 18。从 Altera DSP Builder|Gate&control 库添加 Single Pulse 模块。从 Simulink | Sinks 库添加 SCOPE 模块。

5）在 Simulink 上仿真

在模型里，选择 Simulation|Configuration Parameters 选项，弹出 Configulation 对话框。在 Configuration 对话框中，在 Simulink Time 项，选择 Stop Time 为 5000；在 TYPE 项，选择 Fixed - step。在 Solver 项，选择 discrete(no continuous states)，并单击 OK 按钮。

单击 Simulink|Start Simulation 按钮，开始仿真。双击示波器模块，弹出示波器窗口，如图 8.22 所示。

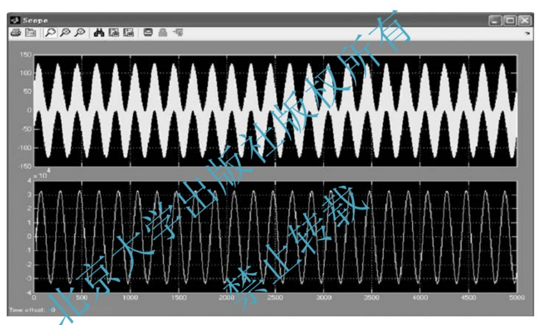


图 8.22　示波器窗口

窗口上面的一路信号是高频和低频叠加以后产生的混合信号，下面一路只有低频信号，表明高频信号已被低通滤波器的滤出，FIR 模块实现了预期的效果。

6）对设计进行编译

添加 Signal comopiler 模块到设计模型中，实现 Simulink 模型到 VHDL 程序的转化，以便在 Quartus II 软件中综合和编译。双击模型中的 Signal compiler 模块，弹出分析 r 对话框，单击 Analyze 按钮，弹出 Signalcompiler 对话框，设置参数，执行转换、编译、适配工作。保存并编译设计模型。

7）执行 RTL 仿真

在 Signalcompiler 运行 Generate Stimuli for VHDL Testbench 时，Signalcompiler 已经自动为设计模型生成了 VHDL testbench 和 Tcl 脚本。可以在仿真工具使用这两个文件。

打开 ModelSim 软件，选择 File，找到工作目录并打开。执行 .tcl 脚本文件，弹出 wave 窗口，显示仿真波形。在把 Input 和 Output 信号设置成 Analog 形式后，显示波形如图 8.23 所示。

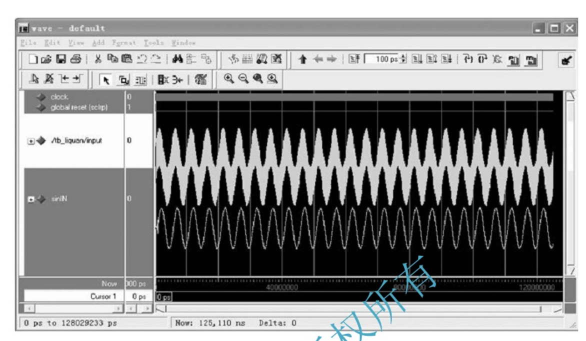


图 8.23 ModelSim 仿真波形



小知识：

随着逻辑设计复杂性的增加，需要一种高效而方便的测试方法，这就是嵌入式逻辑分析仪的使用。DSP Builder 中包含有 SignalTapII 逻辑分析模块，设计者可以使用此模块探测事件触发器，配置存储器，并能显示波形。

本章小结

本章讲述数字信号处理技术的实现和应用。数字信号处理技术的应用在现代社会中应用非常广泛，目前的实现方法是使用专用的 DSP 芯片和基于 FPGA 的信号处理模块。本章首先介绍了 DSP 芯片及其特点，然后介绍了基于 FPGA 的信号处理模块的特点，最后以实例说明基于 FPGA 的信号处理模块的实现方法。

知识拓展

与仅采用 DSP 处理器的传统应用相比，基于 Stratix® II 或者 CycloneTM II 器件的 FPGA 协处理器能够将系统性能显著提高。有效方法是利用 FPGA 结构的灵活性和目前受益于并行处理的 FPGA 架构中的嵌入式 DSP 模块。FPGA 协处理器由于其内在的并行特性，可以卸载 DSP 处理器，以很高的效率实现 DSP 算法中计算量较大的模块。这非常适合视频和图像处理以及高速数字通信等对 DSP 性能要求越来越高的新兴应用。

常见于无线应用中的这类处理有限冲激响应(FIR)滤波、快速傅里叶变换(FFT)、数字上下变频和前向误差校正(FEC)。Xilinx 和 Alrera 都提供了并行嵌入式 DSP 乘法器，这些乘法器的工作频率高于 500MHz，最高可提供 256 GMAC 的 DSP 性能。将需要高速并行处理的工作卸载给 FPGA，而将需要高速串行处理的工作留给 DSP 处理器，这样即可在降低系统要求的同时优化整体系统的性价比。



FPGA可与DSP处理器一起使用，作为独立的预处理器(有时是后处理器)器件，或者作为协处理器。在预处理架构中，FPGA直接位于数据通路中负责信号预处理，预处理后的信号可以高效又经济地移交给DSP处理器进行速率较低的后续处理。

在协处理架构中，FPGA与DSP并列而置，后者将特定算法函数卸载给FPGA，以便实现比单独采用DSP处理器能达到的速度更高的处理速度。FPGA的处理结果传回DSP，或者送至其他器件进一步进行处理、传输或存储如图8.24和图8.25所示。选择预处理、后处理还是协处理，常常取决于在处理器和FPGA之间移动数据所需的时序余量及其对整体延迟的影响。

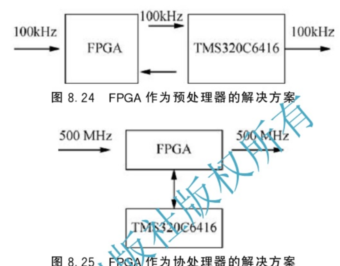


图 8.24　FPGA 作为预处理器的解决方案

图 8.25　FPGA 作为协处理器的解决方案

例如，最新的3G LTE规范将传输时间间隔(TTI)从HSDPA的2ms和WCDMA的10ms缩短到了1ms。这实质上是要求从接收器一直到MAC层输出之间的数据处理时间短于1ms。

在运行速度为3.125Gbps的DSP上使用SRIO端口，使用8b/10b编码和Turbo解码功能需要200比特的额外开销，这会造成0.23ms的DSP到FPGA传输延迟，也就是说在TTI时段中有将近1/4时间用来传输数据，再加上其他可预见的延迟，为了满足这些系统时序，当用户为50个时，所需的Turbo编解码器性能将高达75.8Mbps。

使用FPGA将Turbo编解码器作为独立的处理器，不仅可消除DSP延迟，还能节省时间，因为这样不需要以高带宽在DSP和FPGA之间传输数据。可将Turbo解码器的吞吐量降低，从而可选用更多比较经济的器件，还可以减少系统功耗。

另外，还可考虑在FPGA上是否使用软嵌入式或硬嵌入式处理器IP来卸载某些系统处理任务，进而可能进一步减少成本、功耗和占用空间。有了如此大量的信号处理资源，就可以在DSP处理器、FPGA可配置逻辑块(CLB)、嵌入式FPGA DSP模块和FPGA嵌入式处理器之间更好地分配各种复杂功能(如基带处理中的复杂功能)。FPGA嵌入式处理器提供的有利条件允许将一些非关键性操作合并到在嵌入式处理器上运行的软件中，从而尽量减少整体系统所需的硬件资源总量。

习　　题

8-1　使用Altera DSP Builder实现8点FFT运算。先构成模块图，在进行MATLAB算法仿真，最后进行ModelSim仿真。

8-2　使用Altera DSP Builder设计IIR滤波器。先构成模块图，在进行MATLAB算法仿真，最后进行ModelSim仿真。



附录　MATLAB 基础知识

一、MATLAB 语言介绍

MATLAB 语言是由美国的 Clever Moler 博士于 1980 年开发的，设计者的初衷是为解决“线性代数”课程的矩阵运算问题，取名 MATLAB 即 Matrix Lab oratory（矩阵实验室）的意思。它是将一个优秀软件的易用性与可靠性、通用性与专业性、一般目的的应用与高深的科学技术应用有机的相结合。MATLAB 是一种直译式的高级语言，比其他程序设计语言容易。

二、MATLAB 矩阵及其运算

（一）变量和数据操作

1. 变量与赋值

1）变量命名

在 MATLAB 7.0 中，变量名是以字母开头，后接字母、数字或下划线的字符序列，最多 63 个字符。在 MATLAB 中，变量名区分字母的大小写。例如，myexaple12、myexaple－12、My－exaple12 为合法字符；－myexaple12、12myexaple 为不合法字符。

2）赋值语句

（1）变量＝表达式。含义：将右边表达式的值赋给左边的变量。

（2）表达式。含义：将表达式的值赋给 MATLAB 的预定义变量 ans。

说明：

① 一般地，运算结果在命令窗口中显示出来。如果语句的最后加分号，则只进行赋值操作，不显示运算结果。

② 在 MATLAB 语句后面可以加上注释，用于解释或说明语句的含义，对结果不产生影响。

注释用％开头，后面为注释的内容。

2. 预定义变量

在 MATLAB 工作空间中，有几个由系统本身定义的变量。例如，pi 表示圆周率 π；i、j 表示虚数单位；ans 表示计算结果的默认赋值变量；eps 表示机器零域值；inf、Inf 表示无穷大；NaN、nan 表示非数，是 0/0、inf/inf 的结果；realmax 表示最大正整数；realmin 表示最小正整数。预定义变量有特定的含义，在使用时，应尽量避免对这些变量重新赋值。

3. MATLAB 常用数学函数

MATLAB 提供了许多数学函数，函数的自变量规定为矩阵变量，运算法则是将函数逐项作用于矩阵的元素上，因而运算的结果是一个与自变量同维数的矩阵。

函数使用说明：

(1) 三角函数以弧度为单位计算。

(2) abs 函数可以求实数的绝对值、复数的模、字符串的 ASCII 码值。

(3) 用于取整的函数有 fix、floor、ceil、round，要注意它们的区别。

① fix 函数：向 0 取整函数。

② floor 函数：向 $-\infty$ 取整函数。

③ ceil 函数：向 $+\infty$ 取整函数。

④ round 函数：向最近整数求整函数。

(4) rem 与 mod 函数的区别。rem(x，y)和 mod(x，y)要求 x、y 必须为相同大小的实矩阵或为标量。

① rem 函数：求余数。

② mod 函数：模运算。

(二) MATLAB 矩阵

1. 矩阵的建立

1) 直接输入法

具体方法如下：将矩阵的元素用方括号括起来，按矩阵行的顺序输入各元素，同一行的各元素之间用空格或逗号分隔，不同行的元素之间用分号分隔。

2) 利用冒号表达式建立一个向量

冒号表达式可以产生一个行向量，一般格式为

```
e1:e2:e3
```

其中，e1 为初始值，e2 为步长，e3 为终止。

在 MATLAB 中，还可以用 linspace 函数产生行向量。其调用格式为

```
linspace(a,b,n)
```

其中，a 和 b 是生成向量的第一个和最后一个元素，n 是元素总数。当 n 省略时，自动产生 100 个元素。所以，linspace(a，b，n)与 a：(b−a)/(n−1)：b 等价。

3) 用 MATLAB 函数创建矩阵

(1) 空阵 [] —MATLAB 允许输入空阵，当一项操作无结果时，返回空阵。

(2) rand(m，n)—— 0～1 间 m 行 n 列的均匀分布的随机矩阵。

(3) eye(m，n)——m 行 n 列的单位矩阵。

(4) zeros(m，n)——m 行 n 列，全部元素都为 0 的矩阵。

(5) ones(m，n)——m 行 n 列，全部元素都为 1 的矩阵。

(6) randn(m，n)——产生均值为 0，方差为 1 的 m 行 n 列标准正态分布随机矩阵。



2. 矩阵的拆分

1）矩阵元素

（1）通过下标引用矩阵的元素。

例如，A(3，2)＝200 表示 A 矩阵的第 3 行第 2 个元素赋值为 2。

它只改变该元素的值，不影响其他元素的值。如果给出的行数和列数大于原来 A 矩阵的行数和列数，则自动扩展，并将原来未赋值的元素置为 0。

（2）采用矩阵元素的序号来引用矩阵元素。矩阵元素的序号就是相应元素在内存中的排列顺序。在 MATLAB 中，矩阵元素按列存储，先第一列，再第二列，以此类推。例如：

```
A=[1,2,3;4,5,6];
A(3)
ans=
    2
```

2）矩阵拆分

（1）利用冒号表达式获得子矩阵。

① A(:，j)表示取 A 矩阵的第 j 列全部元素；A(i，:)表示 A 矩阵第 i 行的全部元素；A(i，j)表示取 A 矩阵第 i 行、第 j 列的元素。

② A(i：i＋m，:)表示取 A 矩阵第 i～i＋m 行的全部元素；A(:，k：k＋m)表示取 A 矩阵第 k～k＋m 列的全部元素；A(i：i＋m，k：k＋m)表示取 A 矩阵第 i～i＋m 行内，并在第 k～k＋m 列中的所有元素。

此外，还可利用一般向量和 end 运算符来表示矩阵下标，从而获得子矩阵。end 表示某一维的末尾元素下标。

例：A(end，:)表示 A 矩阵的最后一行元素。

A([m，n]，p：end)表示 A 矩阵第 m、n 行中第 p 列到最后一个元素，A([m，n]，:)表示 A 矩阵第 m、n 行中所有元素；A([m n]，:)表示 A 矩阵第 m、n 行中所有元素。

③A(:)表示将 A 矩阵中的每一列元素堆叠起来，成为一个列向量。

（2）利用空矩阵删除矩阵的元素。

在 MATLAB 中，定义[]为空矩阵。给变量 X 赋空矩阵的语句为 X＝[]。

注意：X＝[]与 clear X 不同，clear 是将 X 从工作空间中删除，而空矩阵则存在于工作空间中，只是维数为 0。

3. 特殊矩阵

1）魔方矩阵

魔方矩阵有一个有趣的性质，其每行、每列及两条对角线上的元素和都相等。对于 n 阶魔方阵，其元素由 1，2，3，…，n^2 共 n^2 个整数组成。MATLAB 提供了求魔方矩阵的函数 magic(n)，其功能是生成一个 n 阶魔方阵。

2）范得蒙矩阵

范得蒙(Vandermonde)矩阵最后一列全为 1，倒数第二列为一个指定的向量，其他各

列是其后列与倒数第二列的点乘积，可以用一个指定向量生成一个范得蒙矩阵。在MATLAB中，函数vander(V)生成以向量V为基础向量的范得蒙矩阵。例如，A=vander([1；2；3；5])即可得到上述范得蒙矩阵。

3）希尔伯特矩阵

在MATLAB中，生成希尔伯特矩阵的函数是hilb(n)。

使用一般方法求逆会因为原始数据的微小扰动而产生不可靠的计算结果。在MATLAB中，有一个专门求希尔伯特矩阵的逆的函数invhilb(n)，其功能是求n阶的希尔伯特矩阵的逆矩阵。

4）托普利兹矩阵

托普利兹(Toeplitz)矩阵除第一行第一列外，其他每个元素都与左上角的元素相同。生成托普利兹矩阵的函数是toeplitz(x，y)，它生成一个以x为第一列，y为第一行的托普利兹矩阵。这里，x、y均为向量，两者不必等长。toeplitz(x)用向量x生成一个对称的托普利兹矩阵。例如：

```
T=toeplitz(1:6)
```

5）伴随矩阵

MATLAB生成伴随矩阵的函数是compan(p)，其中p是一个多项式的系数向量，高次幂系数排在前，低次幂排在后。例如，为了求多项式的x^3-7x+6的伴随矩阵，可使用以下命令。

```
p=[1,0,-7,6];
compan(p)
```


6）帕斯卡矩阵

众所周知，二次项$(x+y)n$展开后的系数随n的增大组成一个三角形表，称为杨辉三角形。由杨辉三角形表组成的矩阵被称为帕斯卡(Pascal)矩阵。函数pascal(n)生成一个n阶帕斯卡矩阵。

三、MATLAB运算

（一）算术运算

1. 基本算术运算

MATLAB的基本算术运算有+(加)、-(减)、*(乘)、/(右除)、\(左除)、^(乘方)。

注意：运算是在矩阵意义下进行的，单个数据的算术运算只是一种特例。

1）矩阵加减运算

假定有两个矩阵A和B，则可以由A+B和A-B实现矩阵的加减运算。

其运算规则如下：若A和B矩阵的维数相同，则可以执行矩阵的加减运算，A和B矩阵的相应元素相加减。如果A与B的维数不相同，则MATLAB将给出错误信息，提示用户两个矩阵的维数不匹配。

2）矩阵乘法

假定有两个矩阵 A 和 B，若 A 为 m×n 矩阵，B 为 n×p 矩阵，则 C=A*B 为 m×p 矩阵。

3）矩阵除法

在 MATLAB 中，有两种矩阵除法运算：\ 和/，分别表示左除和右除。如果 A 矩阵是非奇异方阵，则 A\B 和 B/A 运算可以实现。A\B 等效于 A 的逆左乘 B 矩阵，也就是 inv(A)*B，而 B/A 等效于 A 矩阵的逆右乘 B 矩阵，也就是 B*inv(A)。

注意：

（1）对于含有标量的运算，两种除法运算的结果相同，如 3/4 和 4\3 有相同的值，都等于 0.75。又如，设 a=[10.5，25]，则 a/5=5\a=[2.1000 5.0000]。

（2）对于矩阵来说，左除和右除表示两种不同的除数矩阵和被除数矩阵的关系。对于矩阵运算，一般 A\B≠B/A。

4）矩阵的乘方

一个矩阵的乘方运算可以表示成 A^x，要求 A 为方阵，x 为标量。如 a，p 都是矩阵，a^p 则无意义。

2. 点运算（矩阵的数组运算）

在 MATLAB 中，点运算符有 .*、./、.\ 和 .^。两矩阵进行点运算是指它们的对应元素进行相关运算，要求两矩阵的维参数相同，具体如下。

（1）数组加减(.+，.-)与矩阵的加减相同。

（2）数组乘除(.*，./，.\)。

① a .*b —— a，b 两数组必须有相同的行和列两数组相应元素相乘。

② a./b=b.\a——a 的元素被 b 的对应元素除。

③ a.\b=b./a——a 的元素被 b 的对应元素除。

例：a=[1 2 3]；b=[4 5 6]；c1=a.\b；c2=b./a。

```
c1=
    4.0000    2.5000    2.0000
c2=
    4.0000    2.5000    2.0000
```

（3）数组乘方(.^)——元素对元素的幂。

例：

```
a=[1 2 3];b=[4 5 6];
z=a.^2
z=
    1.00          4.00          9.00
z=a.^b
z=
    1.00        32.00        729.00
```

（二）关系运算

MATLAB 提供了 6 种关系运算符：<（小于）、<=（小于或等于）、>（大于）、>=（大于或等于）、==（等于）、~=（不等于）。

注意：其书写方法与数学中的不等式符号不完全相同。

关系运算符的运算法则如下。

（1）当两个比较量是标量时，直接比较两数的大小。若关系成立，则关系表达式结果为 1，否则为 0。

（2）当参与比较的量是两个维数相同的矩阵时，比较是对两矩阵相同位置的元素按标量关系运算规则逐个进行，并给出元素比较结果。最终的关系运算的结果是一个维数与原矩阵相同的矩阵，它的元素由 0 或 1 组成。

（3）当参与比较的一个是标量，而另一个是矩阵时，则把标量与矩阵的每一个元素按标量关系运算规则逐个比较，并给出元素比较结果。最终的关系运算的结果是一个维数与原矩阵相同的矩阵，它的元素由 0 或 1 组成。

（三）逻辑运算

MATLAB 提供了 3 种逻辑运算符：&（与）、|（或）和~（非）。

逻辑运算的运算法则如下。

（1）在逻辑运算中，确认非零元素为真，用 1 表示；零元素为假，用 0 表示。

（2）设参与逻辑运算的是两个标量 a 和 b，那么有以下几种情况。

① a&b：当 a，b 全为非零时，运算结果为 1，否则为 0。

② a | b：a，b 中只要有一个非零，运算结果为 1。

③ ~a：当 a 是零时，运算结果为 1；当 a 非零时，运算结果为 0。

（3）若参与逻辑运算的是两个同维矩阵，那么运算将对矩阵相同位置上的元素按标量规则逐个进行。最终运算结果是一个与原矩阵同维的矩阵，其元素由 1 或 0 组成。

（4）若参与逻辑运算的一个是标量，一个是矩阵，那么运算将在标量与矩阵中的每个元素之间按标量规则逐个进行。最终运算结果是一个与矩阵同维的矩阵，其元素由 1 或 0 组成。

（5）逻辑非是单目运算符，也服从矩阵运算规则。

（6）在算术、关系、逻辑运算中，算术运算优先级最高，逻辑运算优先级最低。

（四）字符串

在 MATLAB 中，字符串是用单撇号括起来的字符序列。

MATLAB 将字符串当作一个行向量，每个元素对应一个字符，其标识方法和数值向量相同，也可以建立多行字符串矩阵。

字符串是以 ASCII 码形式存储的。abs 和 double 函数都可以用来获取字符串矩阵所对应的 ASCII 码数值矩阵。相反，char 函数可以把 ASCII 码矩阵转换为字符串矩阵。

与字符串有关的另一个重要函数是 eval，其调用格式为

```
eval(t)
```

其中，t 为字符串。它的作用是把字符串的内容作为对应的 MATLAB 语句来执行。



字符串写法注意事项如下。

(1) 若字符串中的字符含有单撇号，则该单撇号用两个单撇号来表示。

(2) 对于较长的字符串可以用字符串向量来表示，即用[ ]括起来。

(五) 单元数据

建立单元矩阵和一般矩阵相似，只是矩阵元素用大括号括起来，可以用带有大括号下标的形式引用单元矩阵元素，如 b{3，3}。单元矩阵的元素可以是结构或单元数据，可以使用 celldisp 函数来显示整个单元矩阵，如 celldisp(b)。此外，还可用[ ]删除单元矩阵中的某个元素。

(六) 矩阵变换与计算

1. 对角阵与三角阵

1) 对角阵

只有对角线上有非 0 元素的矩阵被称为对角矩阵，对角线上的元素都为 1 的对角矩阵被称为单位矩阵。

(1) 提取矩阵的对角线元素。设 A 为 m×n 矩阵，diag(A)函数用于提取矩阵 A 主对角线元素，产生一个列向量。diag(A，k)其功能是提取第 k 条对角线的元素。

(2) 构造对角矩阵。diag(V)将产生一个 m×m 对角矩阵，其主对角线元素即为向量 V 的元素。diag(V，k)，其功能是产生一个对角阵，其第 k 条对角线的元素即为向量 V 的元素。

例：先建立 5×5 矩阵 A，然后将 A 的第一行元素乘以 1，第二行乘以 2，…，第五行乘以 5。

```
A= [17,0,1,0,15;23,5,7,14,16;4,0,13,0,22;10,12,19,21,3;11,18,25,2,19];
D= diag(1:5);
D* A;                    % 用 D 左乘 A,对 A 的每行乘以一个指定常数
```

2) 三角阵

三角阵分为上三角阵和下三角阵，所谓上三角阵，即矩阵的对角线以下的元素全为 0 的一种矩阵，而下三角阵则是对角线以上的元素全为 0 的一种矩阵。

(1) 上三角矩阵。triu(A)是提取矩阵 A 的上三角阵。triu(A，k)的功能是求矩阵 A 的第 k 条对角线以上的元素。

(2) 下三角矩阵。在 MATLAB 中，提取矩阵 A 的下三角矩阵的函数是 tril(A)和 tril(A，k)，其用法与 triu(A)和 triu(A，k)完全相同。

2. 矩阵的转置与旋转

转置运算符是单撇号(′)。

利用函数 rot90(A，k)将矩阵 A 旋转 90°的 k 倍，当 k 为 1 时可省略。

3. 矩阵的翻转

MATLAB 对矩阵 A 实施左右翻转的函数是 fliplr(A)；MATLAB 对矩阵 A 实施上下翻转的函数是 flipud(A)。

4. 矩阵的逆与伪逆

在 MATLAB 中，求方阵 A 的逆矩阵可调用函数 inv(A)。

如果矩阵 A 不是一个方阵，或者 A 是一个非满秩的方阵，则矩阵 A 没有逆矩阵，但可找到一个与 A 同型的矩阵 B，使得

A·B·A=A

B·A·B=B

此时，称矩阵 B 为矩阵 A 的伪逆，也称为广义逆矩阵。在 MATLAB 中，求一个矩阵伪逆的函数是 pinv(A)。

5. 方阵的行列式

在 MATLAB 中，求方阵 A 所对应的行列式的值的函数是 det(A)。

6. 矩阵的秩与迹

在 MATLAB 中，求矩阵秩的函数是 rank(A)。

在 MATLAB 中，求矩阵的迹的函数是 trace(A)。

7. 矩阵的特征值与特征向量

在 MATLAB 中，计算矩阵 A 的特征值和特征向量的函数是 eig(A)，常用格式有以下两种。

(1) E=eig(A)：求矩阵 A 的全部特征值，构成向量 E。

(2) [V，D]=eig(A)：求矩阵 A 的全部特征值，构成对角阵 D，并求 A 的特征向量构成 V 的列向量。

三、MATLAB 程序设计

(一) M 文件

1. M 文件分类

用 MATLAB 语言编写的文件称为 m 文件，其扩展名为 .m。M 文件根据调用方式的不同分为两类：命令文件和函数文件。命令文件实际上是一串指令的集合，与在命令窗口逐行执行文件中的所有指令，其结果是一样的。没有输入输出参数。命令文件包括两部分：注释文件和程序文件。

2. M 文件的建立与打开

1) 建立新的 M 文件

以下为新建 M 文件的 3 种方法。

(1) 菜单操作。由 File 菜单打开。

(2) 命令操作。在命令窗口输入命令：edit。

(3) 命令按钮操作。单击工具栏的 New M－File 命令按钮。

2）打开已有的 M 文件

以下为打开 M 文件的 3 种方法。

（1）菜单操作。从 File 菜单打开 M 文件。

（2）命令操作。在命令窗口输入命令：edit 文件名。

（3）命令按钮操作。单击工具栏上的 Open File 命令按钮，打开 M 文件。

（二）程序控制结构

1. 顺序结构

1）数据的输入

从键盘输入数据，可用 input 函数，调用格式为

```
A=input(提示信息,选项);
```

提示信息：一个字符串，用于提示用户输入什么样的数据。

如果在 input 函数调用时采用‘s’选项，则允许用户输入一个字符串。

2）数据的输出

输出函数主要有 disp 函数，其调用格式为

```
disp(输出项)
```

其中输出项既可以为字符串，也可以为矩阵。

例：输入 x、y 的值，并将它们的值互换后输出。

```
x=input('Input x please.');
y=input('Input y please.');
z=x;
x=y;
y=z;
disp(x);
disp(y);
```

3）程序的暂停

使用 pause 函数，其调用格式为

```
pause(延迟秒数)
```

如果直接使用 pause，则将暂停程序，直到用户按任意键后程序继续执行。若要强行中止程序的运行则可使用 Ctrl+C 组合键。

2. 选择结构

1）if 语句

在 MATLAB 中，if 语句有 3 种格式。

（1）单分支 if 语句。

```
if 条件
  语句组
end
```

（2）双分支 if 语句。

```
if 条件
  语句组 1
else
  语句组 2
end
```

（3）多分支 if 语句。

```
if 条件 1
  语句组 1
elseif 条件 2
  语句组 2
  ……
elseif 条件 m
  语句组 m
else
  语句组 n
end
```

语句用于实现多分支选择结构。

结论：

在条件表达式中，通常都是由关系操作符＞、＜、＜＝、＞＝、＝＝、～＝等和逻辑操作符 &、|、～等构成。

逻辑函数：

① isequal—— 若是相等则为真。

② sempty—— 若是空矩阵则为真。

③ isstr—— 若是字符串则为真。

2）switch 语句

该语句格式为

```
switch  表达式
  case  表达式 1
    语句组 1
  case  表达式 2
    语句组 2
  ……
  case  表达式 m
    语句组 m
  otherwise
    语句组 n
end
```

注意：

（1）switch 子句后面的表达式为一个标量或一个字符串。



（2）case 子句后面的表达式不仅可以为一个标量或一个字符串，而且可以为一个单元矩阵。

（3）如果 case 子句后面的表达式为一个单元矩阵，则当表示表达式的值等于该单元矩阵的某个元素时，执行相应语句。

3）try 语句

其语句格式为

```
try
  语句组 1
catch
  语句组 2
end
```

try 语句先试探性执行语句组 1，如果语句组 1 在执行过程中出现错误，则将错误信息赋给保留的 lasterr 变量，并转去执行语句组 2。

例：矩阵乘法运算要求两矩阵的维数相容，否则会出错。先求两矩阵的乘积，若出错，则自动转去求两矩阵的点乘。

```
A=[1,2,3;4,5,6];B=[7,8,9;10,11,12];
try
  C=A*B;
catch
  C=A.*B;
end
C
lasterr            % 显示出错原因
```


3. 循环结构

1）for 语句

for 语句的格式为

```
for 循环变量=表达式 1:表达式 2:表达式 3
    循环体语句
end
```

for 语句更一般的格式为

```
for 循环变量=矩阵表达式
    循环体语句
  end
```

执行过程是依次将矩阵的各列元素赋给循环变量，然后执行循环体语句，直至各列元素处理完毕。

2）while 语句

while 语句的一般格式为



```
while(条件)
  循环体语句
end
```

3） break 语句和 continue 语句

它们一般与 if 语句配合使用。

（1） break 语句用于终止循环的执行。当在循环体内执行到该语句时，程序将跳出循环，继续执行循环语句的下一语句。

（2） continue 语句控制跳过循环体中的某些语句。当在循环体内执行到该语句时，程序将跳过循环体中所有剩下的语句，继续下一次循环。

4） 循环的嵌套

如果一个循环结构的循环体又包括一个循环结构，就称为循环的嵌套，或称为多重循环结构。

（三） 函数文件

1. 函数文件的基本结构

函数文件基本结构为

```
function 输出形参表= 函数名(输入形参表)
注释说明部分
函数体语句
```

其中，以 function 开头的一行为引导行，表示该 M 文件是一个函数文件。函数名的命名规则与变量名相同。输入形参为函数的输入参数，输出形参为函数的输出参数。当输出形参多于一个时，应该用方括号括起来。

2. 函数调用

函数调用的一般格式是

```
[输出实参表]= 函数名(输入实参表)
```

注意：函数调用时各实参出现的顺序、个数，应与函数定义时形参的顺序、个数一致，否则会出错。函数调用时，先将实参传递给相应的形参，从而实现参数传递，然后再执行函数的功能。

例：利用函数文件，实现直角坐标(x，y)与极坐标(ρ，θ)之间的转换。

函数文件 tran. m：

```
function [rho,theta]=tran(x,y)
rho=sqrt(x*x+y*y);
theta=atan(y/x);
```

调用 tran. m 的命令文件 main1. m：

```
x=input('Please input x=:');
y=input('Please input y=:');
[rho,the]=tran(x,y);
```

```
rho
the
```

四、MATLAB 绘图

（一）二维数据曲线图

1. 绘制单根二维曲线

plot 函数的基本调用格式为

```
plot(x,y)
```

其中，x 和 y 为长度相同的向量，分别用于存储 x 坐标和 y 坐标数据。

plot 函数最简单的调用格式是只包含一个输入参数，其格式为

```
plot(x)
```

在这种情况下，当 x 是实向量时，以该向量元素的下标为横坐标，元素值为纵坐标画出一条连续曲线，这实际上是绘制折线图。

2. 绘制多根二维曲线

1）plot 函数的输入参数是矩阵形式

（1）当 x 是向量，y 是有一维与 x 同维的矩阵时，则绘制出多根不同颜色的曲线。曲线条数等于 y 矩阵的另一维数，x 被作为这些曲线共同的横坐标。

（2）当 x、y 是同维矩阵时，则以 x、y 对应列元素为横、纵坐标分别绘制曲线，曲线条数等于矩阵的列数。

（3）对只包含一个输入参数的 plot 函数，当输入参数是实矩阵时，则按列绘制每列元素值相对其下标的曲线，曲线条数等于输入参数矩阵的列数；当输入参数是复数矩阵时，则按列分别以元素实部和虚部为横、纵坐标绘制多条曲线。

2）含多个输入参数的 plot 函数

其调用格式为

```
plot(x1,y1,x2,y2,…,xn,yn)
```

（1）当输入参数都为向量时，x1 和 y1，x2 和 y2，…，xn 和 yn 分别组成一组向量对，每一组向量对的长度可以不同。每一向量对可以绘制出一条曲线，这样可以在同一坐标内绘制出多条曲线。

（2）当输入参数有矩阵形式时，配对的 x、y 按对应列元素为横、纵坐标分别绘制曲线，曲线条数等于矩阵的列数。

3）具有两个纵坐标标度的图形

在 MATLAB 中，如果需要绘制出具有不同纵坐标标度的两个图形，可以使用 plotyy 绘图函数。

其调用格式为

```
plotyy(x1,y1,x2,y2)
```

其中，x1、y1 对应一条曲线，x2、y2 对应另一条曲线。横坐标的标度相同，纵坐标有两个，左纵坐标用于 x1、y1 数据对，右纵坐标用于 x2、y2 数据对。

4）图形保持

hold on/off 命令控制是保持原有图形还是刷新原有图形，不带参数的 hold 命令在两种状态之间进行切换。

3. 设置曲线样式

MATLAB 提供了一些绘图选项，用于确定所绘曲线的线型、颜色和数据点标记符号，它们可以组合使用。例如，"b-."表示蓝色点划线，"y：d"表示黄色虚线并用菱形符标记数据点。当选项省略时，MATLAB 规定，线型一律用实线，颜色将根据曲线的先后顺序依次。

要设置曲线样式可以在 plot 函数中加绘图选项，其调用格式为

```
plot(x1,y1,选项 1,x2,y2,选项 2,…,xn,yn,选项 n)
```

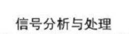
颜色选项和标记符号选项说明见附表 1 和附表 2。

附表 1　颜色选项

字母	颜色	标点	线型
y	黄色	·	点线
m	粉红	○	圈线
c	亮蓝	×	×线
r	大红	+	+字线
g	绿色	—	实线
b	蓝色	*	星形线
w	白色	:	虚线
k	黑色	—·	点划线
		——	双划线

附表 2　标记符号

标记符号	说明
s	方块符
d	菱形
v	朝下三角符号
^	朝上三角符号




续表

标记符号	说明
<	朝左三角符号
>	朝右三角符号
P	五角星符号
B	六角星符号

4. 图形标注与坐标控制

1) 图形标注

有关图形标注函数的调用格式为

```
title(图形名称)——给图形加标题
xlabel(x 轴说明)——给 x 轴加标注
ylabel(y 轴说明)——给 y 轴加标注
text(x,y,图形说明)——在图形指定位置加标注
legend(图例 1,图例 2,…)——添加图例
```

2) 坐标控制

axis 函数的调用格式为

```
axis([xmin xmax ymin ymax zmin zmax])
```

axis 函数功能丰富，常用的格式还有以下几种。

(1) axis equal：纵、横坐标轴采用等长刻度。

(2) axis square：产生正方形坐标系(默认为矩形)。

(3) axis auto：使用默认设置。

(4) axis off：取消坐标轴。

(5) axis on：显示坐标轴。

给坐标加网格线用 grid 命令来控制。grid on/off 命令控制是画还是不画网格线，不带参数的 grid 命令在两种状态之间进行切换。

给坐标加边框用 box 命令来控制。box on/off 命令控制是加还是不加边框线，不带参数的 box 命令在两种状态之间进行切换。

5. 图形窗口的分割

subplot 函数的调用格式为

```
subplot(m,n,p)
```

该函数将当前图形窗口分成 m×n 个绘图区，即每行 n 个，共 m 行，区号按行优先编号，且选定第 p 个区为当前活动区。在每一个绘图区允许以不同的坐标系单独绘制图形。

6. 多窗口绘图

figure(n)—— 创建窗口函数，n 为窗口顺序号。



（二）其他二维图形

1. 其他坐标系下的二维数据曲线图

1）对数坐标图形

MATLAB提供了绘制对数和半对数坐标曲线的函数，调用格式为

```
semilogx(x1,y1,选项 1,x2,y2,选项 2,…)——使用半对数坐标,x 轴为对数刻度,y 为线性刻度
semilogy(x1,y1,选项 1,x2,y2,选项 2,…)——使用半对数坐标,y 轴为对数刻度,x 为线性刻度
loglog(x1,y1,选项 1,x2,y2,选项 2,…)——使用全对数刻度,x\y 轴为对数刻度
```

2）极坐标图

polar函数用来绘制极坐标图，其调用格式为

```
polar(theta,rho,选项)
```

其中，theta为极坐标极角，rho为极坐标矢径，选项的内容与plot函数相似。

2. 二维统计分析图

常见的有条形图、阶梯图、杆图和填充图等，所采用的函数分别如下。

```
bar(x,y,选项)——绘制直方图
stairs(x,y,选项)——绘制阶梯图
stem(x,y,选项)——绘制火柴杆图
fill(x1,y1,选项 1,x2,y2,选项 2,…)——填充图
Hist(x,y,选项)——绘制统计直方图
rose(x,y,选项)——绘制统计扇形图
comet(x,y,选项)——绘制彗星曲线
errorbar——绘制误差棒图
compass——复数向量图(罗盘图)
feather——复数向量投影图(羽毛图)
quiver——向量场图
area——区域图
pie——饼图
convhull——凸壳图
scatter——离散点图
```


fill的功能：fill函数按向量元素下标渐增次序依次用直段连接x、y对应元素数据点。假如这样连接折线不封闭，那么MATLAB将自动把该折线首尾连接起来，构成封闭多边形，然后将多边形内部涂满指定的颜色即绘制二维多边形并填充颜色。

例：分别以条形图、阶梯图、杆图和填充图形式绘制曲线y=2sin(x)。

```
x=0:pi/10:2*pi;
y=2*sin(x);
subplot(2,2,1);bar(x,y,'g');
title('bar(x,y,''g'')');axis([0,7,-2,2]);
subplot(2,2,2);stairs(x,y,'b');
title('stairs(x,y,''b'')');axis([0,7,-2,2]);
```



```
subplot(2,2,3);stem(x,y,'k');
title('stem(x,y,''k'')');axis([0,7,-2,2]);
subplot(2,2,4);fill(x,y,'y');
title('fill(x,y,''y'')');axis([0,7,-2,2]);
```

(三) 三维图形

1. 三维曲线

plot3 函数与 plot 函数用法十分相似，其调用格式为

```
plot3(x1,y1,z1,选项 1,x2,y2,z2,选项 2,…,xn,yn,zn,选项 n)
```

2. 三维曲面

1) 产生三维数据

在 MATLAB 中，利用 meshgrid 函数产生平面区域内的网格坐标矩阵。其格式为

```
x= a:d1:b;
y= c:d2:d;
[X,Y]= meshgrid(x,y);
```

2) 绘制三维曲面的函数

surf 函数和 mesh 函数的调用格式为

```
mesh(x,y,z,c)
surf(x,y,z,c)
```

一般情况下，x、y、z 是维数相同的矩阵。其中，x、y 是网格坐标矩阵，z 是网格点上的高度矩阵，c 用于指定在不同高度下的颜色范围。当 c 省略时，默认 c=z；当 x、y 省略时，把 z 矩阵的列下标作为 x 轴坐标，把 z 矩阵的行下标作为 y 轴坐标，然后绘制曲线；当 x、y 为向量时，必须要求 x 的长度等于 z 矩阵的列，y 的长度等于 z 矩阵的行，x、y 向量元素的组合构成网格点的 x－y 坐标，z 轴坐标则取自 z 矩阵，然后绘图。

两者的区别：mesh 网格图中线条有颜色，线条间补面无颜色；surf 曲面图的线条是黑色，线条间补面有颜色。

例：绘制三维曲面图 $z=\sin(x+\sin(y))-x/10$。

```
[x,y]=meshgrid(0:0.25:4*pi);
z=sin(x+sin(y))-x/10;
mesh(x,y,z);
axis([0 4*pi 0 4*pi-2.5 1]);
```

此外，还有两个和 mesh 函数类似的函数。

(1) meshc 函数：带等高线的三维网格曲面函数。

(2) meshz 函数：带底座的三维网格曲面函数。

3) 标准三维曲面

sphere 函数的调用格式为



```
[x,y,z]=sphere(n)
```

该函数产生(n+1)*(n+1)矩阵 x、y、z，绘制半径为 1 的单位球体，n 决定了球面的圆滑程度，默认值为 20。

cylinder 函数的调用格式为

```
[x,y,z]=cylinder(R,n)
```

其中，R 为向量，存放柱面各个等间隔高度的半径；n 表示圆柱圆周上有 n 间隔点，默认值为 20。

MATLAB 还有一个 peaks 函数，被称为多峰函数，常用于三维曲面的演示。

3. 其他三维图形

它包括条形图、杆图、饼图和填充图等特殊图形，它们可以以三维形式出现，使用的函数分别是 bar3、stem3、pie3 和 fill3。

bar3 函数绘制三维条形图，常用格式为

```
bar3(y)——y 的每一个元素对应一个条形
bar3(x,y)——在 x 指定的位置上绘制 y 中元素的条形图
```

stem3 函数绘制离散序列数据的三维杆图，常用格式为

```
stem3(z)——从 xy 平面向上延伸的杆图,x 和 y 自动生成
stem3(x,y,z)——在 x 和 y 指定的位置上绘制 z 的杆图,x、y、z 的维数必须相同
```

pie3 函数绘制三维饼图，常用格式为

```
pie3(x)——用 x 中的数据绘制一个三维饼图
```

fill3 函数等效于三维函数 fill，可在三维空间内绘制出填充过的多边形，常用格式为

```
fill3(x,y,z,c)——使用 x,y,z 作为多边形的顶点,而 c 指定了填充的颜色
```

常用的图形还有瀑布图和三维曲面的等高线图。

```
waterfull——绘制瀑布图,它的网格线 x 轴方向出现,具有瀑布效果
counter——二维等高线图
counter3——三维等高线图
```

五、符号计算

1. 符号向量(矩阵)的输入

1) 用函数 sym 定义符号矩阵

函数 sym 实际是在定义一个符号表达式，这时的符号矩阵中的元素可以是任何的符号或者是表达式，而且长度没有限制。只需将方括号置于单引号中。

例：

```
>>sym_matrix=sym('[a  b  c;Jack  Help_Me  NO_WAY]')
sym_matrix=
```




```
        [  a,        b,          c]
        [Jack,   Help_Me,   NO_WAY]
```

2）用函数 syms 定义符号矩阵

先定义矩阵中的每一个元素为一个符号变量，而后像普通矩阵一样输入符号矩阵。

例：

```
>> syms  a  b  c;
>>  M1= sym('Classical');
>>  M2= sym(' Jazz');
>>  M3= sym('Blues');
>>  A = [a  b  c;M1,M2,M3;sym([2  3  5])]
A=
         [      a,    b,    c]
         [Classical,  Jazz,  Blues]
         [      2,    3,    5]
```

2. 符号矩阵的计算

1）符号矩阵的四则运算

它包括符号矩阵的和(symadd)、差(symsub)、乘(symmul)。

例：

```
A=sym('[1/x,1/(x+1);1/(x+2),1/(x+3)]');
B=sym('[x,1;x+2,0]');
C=B-A
D=a\b
```


则显示：

```
C=
    x-1/x  1-1/(x+1)
    x+2-1/(x+2)  - 1/(x+3)
D=
    - 6*x-2*x^3-7*x^2    1/2*x^3+x+3/2*x^2
    6+2*x^3+10*x^2+14*x  - 2*x^2-3/2*x-1/2*x^3
```

2）其他基本运算

符号矩阵的其他基本运算包括转置(')、行列式(det)、逆(inv)、秩(rank)、幂(^)和指数(exp 和 expm)等，都与数值矩阵相同。

3. 符号矩阵的简化

符号工具箱中提供了符号矩阵因式分解、展开、合并、简化及通分等符号操作函数。

1）因式分解

命令：factor——符号表达式因式分解函数

格式：factor(s)

说明：s 为符号矩阵或符号表达式，常用于多项式的因式分解。

例：将 x^9-1 分解因式。

在 MATLAB 命令窗口输入

```
syms x
factor(x^9-1)
```

则显示

```
ans=
    (x- 1)* (x^2+ x+ 1)* (x^6+ x^3+ 1)
```

2）符号矩阵的展开

命令：expand——符号表达式展开函数

格式：expand(s)

说明：s 为符号矩阵或表达式。常用在多项式的因式分解中，也常用于三角函数，指数函数和对数函数的展开中。

例：将 $(x+1)^3$、$\sin(x+y)$ 展开。

在 MATLAB 编辑器中建立 M 文件：LX0710.m。

```
syms  x  y
p=expand((x+1)^3);
q=expand(sin(x+y));
```

则结果显示为

```
p=
  x^3+3*x^2+ 3*x+1
q=
  sin(x)*cos(y)+cos(x)*sin(y)
```


3）同类式合并

命令：Collect——合并系数函数

格式：Collect(s，v)——将 s 中的变量 v 的同幂项系数合并

说明：Collect(s)：s 为矩阵或表达式，此命令对由命令 findsym 函数返回的默认变量进行同类项合并。

4）符号简化

命令：simple 或 simplify——寻找符号矩阵或符号表达式的最简型

格式：simple(s)(s——矩阵或表达式)

说明：simple(s)将表达式 s 的长度化到最短。若还想让表达式更加精美，则可使用函数 pretty。

格式：pretty(s)——使表达式 s 更加精美

例：计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

的值。



在 MATLAB 编辑器中建立 M 文件：LX0711. m。

```
syms  a  b  c  d
A= [1 1 1 1;a b c d;a^2 b^2 c^2 d^2;a^4 b^4 c^4 d^4];
d1=det(A);
d2=simple(d1);%化简表达式 d1
pretty(d2);%让表达式 d2 符合人们的书写习惯
```

则显示

```
d1=
  b*c^2*d^4-b*d^2*c^4-b^2*c*d^4+b^2*d*c^4+b^4*c*d^2-b^4*d*c^2-a*c^2*d^4+a*d^2*c
^4+a*b^2*d^4-a*b^2*c^4-a*b^4*d^2+a*b^4*c^2+a^2*c*d^4-a^2*d*c^4-a^2*b*d^4+a^2*b*c^4
+a^2*b^4*d-a^2*b^4*c-a^4*c*d^2+a^4*d*c^2+a^4*b*d^2-a^4*b*c^2-a^4*b^2*d+a^4*b^2*c
d2=
   (-d+c)*(b-d)*(b-c)*(-d+a)*(a-c)*(a-b)*(a+c+d+b)
   (-d+c)(b-d)(b-c)(-d+a)(a-c)(a-b)(a+c+d+b)
```